

UNIVERSIDAD NACIONAL DE AREQUIPA

FACULTAD DE LETRAS

**“ACERCA DE LA TEORÍA KANTIANA
DEL ESPACIO”**

AREQUIPA, ENERO DE 1961

Al Doctor

Miguel Ángel Rodríguez Rivas

Maestro y dilecto amigo.

INDICE

	Páginas
Presentación	1
I.- Introducción	2-21
a.- La “revolución copernicana”	2
b.- Conocimiento puro y conocimiento empírico	8
c.- Juicio analítico y juicio sintético	12
d.- Juicio sintético a priori y ciencia	15
II.- Teoría Kantiana del espacio	22-45
a.- Conceptos previos	25
b.- Deducción metafísica del espacio	27
c.- Deducción trascendental del espacio	29
d.- Conclusiones de lo precedente	31
e.- Euclides y Newton en la concepción Kantiana	34
III.- El espacio y su consideración actual	46-159
A.- En la geometría	47-97
1.- En la geometría pura	48-88
a.- Geometría elemental o de magnitudes	49
b.- Geometría proyectiva	52
c.- Axiomática y geometrías no euclidianas	59
d.- Geometría topológica	71
e.- Geometría pura y espacio	76
2.- Geometría natural	88
B.- En la física	98-152
1.- Física relativista	98-152
a.- La transformación de Lorente	99
b.- Teoría de la relatividad restringida	104
c.- El aporte de Ninkowsky	99
d.- Relatividad generalizada	136
2.- Física de los cuantos	152
C.- El espacio como categoría filosófica	160
Conclusiones	169.

Señor Decano,

Señores Catedráticos

Traigo para optar el grado de bachiller la tesis titulada “Acerca de la teoría Kantiana del Espacio”. Este trabajo no tiene más cometido que mostrar la insostenibilidad actual de la teoría kantiana sobre el espacio; no pretendiendo, en forma alguna, realizar un amplio ni menos acabado estudio de la compleja realidad del espacio ni de los graves problemas que presenta.

Para desarrollar nuestro tema se ha buscado dar una ajustada exposición de la tesis kantiana pertinente, pasando luego a desenvolver las consideraciones actuales del espacio en la geometría y en la física; tal se ha hecho por cuanto los dos pilares de la teoría de Kant son, precisamente, la geometría y la física, la euclidiana y la newtoniana, respectivamente.

Dos razones nos han impulsado; una, nuestra admiración por la filosofía de la ciencia, altísima cumbre del pensamiento humano; otra, nuestro respeto a Kant, preclaro y muy grande filósofo.

Queda pues, Señores Catedráticos, sometido a vuestro criterio este trabajo.

I.- I N T R O D U C C I Ó N

Previamente a la exposición de la doctrina Kantiana del espacio, motivo de esta tesis y consideraciones sobre ella, es necesario exponer determinados conceptos sobre objetivos y nociones Kantianos, indispensables para una mejor inteligencia del tema central. Tanto en esta parte como en la siguiente, sobre el espacio en Kant, se seguirá estrictamente la exposición Kantiana vertida en los prólogos de la primera y segunda ediciones, así como la Introducción y Estética Trascendental de la Crítica de la Razón Pura.

Veamos:

A.- LA “REVOLUCIÓN COPERNICANA”.-

La experiencia se asienta sobre un conjunto de principios que, si bien son fundamento de toda la experiencia, tienen, a su vez, su explicación más allá de ésta; surge, pues, en consecuencia la necesidad de explicar tales principios.

Ahora bien, se intenta la explicación de estos principios que posibilitan la experiencia desde dos puntos opuestos: mediante el idealismo, a partir de fundamentos racionales; o bien partiendo del empirismo, según examen de la simple experiencia, tal el caso del empirismo inglés. Más ambos intentos, antagónicos en sus puntos de partida, devienen en dogmatismo por exclusivismo de enjuiciamiento, desconocedor de la experiencia el primero, y de la razón el segundo.

Pero preguntémonos, ¿a qué resultados se ha llegado? ¿en qué ha devenido la metafísica, ciencia que se ocupa de estos principios? Pues, simplemente, ha llegado a una marea conceptualista que no explica nada en conclusión, y que no ha servido más que para enmarañar más la problematicidad de los principios puestos a su enjuiciamiento. Así la metafísica, “reina de las ciencias”, la “ciencia de las cosas profundas” ha devenido en total desprestigio; y en tanto

sus sutiles y bizantinas discusiones sólo mueven a desconfianza, sus problemas yacen marginados esperando solución.

Mas, mientras tal sucede con la metafísica y sus problemas, frente a ella se yerguen otros conocimientos, matemáticas y física, que con paso firme han iniciado la dominación de sus problemas, y siguiendo el “seguro camino de la ciencia” tienen una explicación cada vez mayor y más profunda, constituyendo un cuerpo de doctrina unitario y progresivo. Y, ¿a qué deben estas ciencias tales resultados?, pues la respuesta simple y concreta es que todo lo deben a su fructífera metodología. Desde el día en que la matemática, dejando la simple medición y configuración de lo dado en la experiencia, se retrotrae a la construcción racional de sus elementos y procesos, analizando y desenvolviendo lo que de razón hay en la elaboración matemática, desde ese momento iníciase como verdadera ciencia; tal ya sucedió en Grecia, es pues la matemática una ciencia ya antigua. Y lo mismo sucede con la física; en tanto fue una simple persecución de los fenómenos anduvo desorientada, mas desde que se comprendió que la “razón sólo descubre lo que ella ha producido según sus propios planes”, desde que mediante un esquema racional se interrogó a la naturaleza, ésta respondió certeramente y se inició la marcha de la ciencia física.

He aquí la metodología de estas ciencias, elaboración racional de sus problemáticas: construcción racional de sus sistemas, matemáticas; o, esquemas racionales interpretativos, física. ¿Cuál ha sido, en cambio, el proceder de la metafísica? ¿Cuál su intento? La metafísica en su afán de conocer y dar razón de todo, lo dado en la experiencia y lo que está más allá de ella, ya sea en su dirección racionalista o empiricista, ha intentado explicar siempre las cosas mismas, lo existente en cuanto ello mismo; y no ha indagado sobre lo que la razón pone en el conocimiento, ha descuidado interrogar la parte de racionalidad que hay en todo conocimiento. Y siguiendo este camino sabemos que no ha llegado a nada.

¿Qué hacer ante tal situación? Si vemos que los caminos hasta aquí seguidos por la metafísica han fallado en su intento,

¿por qué no buscar una nueva vía?, ¿es posible esta vía distinta? Sí. Si hasta aquí se ha errado el camino, sigamos otro, uno análogo al seguido por las matemáticas y la física. ¿Cómo se aplicaría este método a la metafísica? Siendo la metafísica la ciencia que pretende responder a la totalidad de lo cognoscible, que busca dar razón de todo lo dado, tiene pues que realizar el análisis de las condiciones generales que posibilitan todo conocimiento posible; su tarea consistirá en examinar el conocimiento en cuanto fundamento de todo conocimiento particular. Mas la cuestión no reside simplemente en analizar el conocimiento, sino en operar una vuelta metodológica, análoga en lo posible a la experimentada en las ciencias; debemos analizar el conocimiento en cuanto tiene de racionalidad, de elementos impuestos por la razón, de esquemas constructivos racionales a través de los cuales se nos da todo conocimiento. Es menester hacer como Copérnico quien no pudiendo explicar los fenómenos celestes mediante la rotación de todo el Universo, transfirió el movimiento a la tierra y cumplió su objetivo; así, si la metafísica no ha podido dar conocimientos ciertos teniendo como base las cosas, giremos en redondo e intentemos explicar las cosas por la racionalidad que nuestro conocimiento pone en ellas.

Tal es la “revolución copernicana” que Kant imprime a la filosofía.

Nos encontramos, pues, ante la necesidad insoslayable de realizar el análisis riguroso de la razón humana. Y, ¿qué habremos de lograr con él? Dos cosas: una negativa, precisar los linderos hasta donde es posible el conocimiento racional; solución negativa, es cierto, pero no por tal menos útil, ya que fijaremos los límites de la racionalidad, tarea de suyo harto necesaria. Otra positiva la de delimitar el terreno en el cual ya no es posible a la razón teórica, sino que han de ser buscadas ya no en “las fuentes teóricas del conocimiento, por que

pueden estar en las prácticas”, (la libertad como fundamento de la moral por ejemplo), Quede dicho, de paso, que tal distinción es posible por la diferenciación entre “fenómeno” y “nómeno”, objeto dado a nuestro conocimiento y cosa en si allende nuestra cognoscibilidad teórica.

Este el objetivo kantiano; Análisis y estructuración definitivos de los fundamentos de todo conocimiento en cuanto tiene de general, para iniciar a la metafísica en el “seguro camino de la ciencia”.

Expongamos de este sistema lo que nos respecta.

B.- CONOCIMIENTO PURO Y CONOCIMIENTO EMPÍRICO.-

Es algo evidente el que nuestro conocimiento empieza con la experiencia. Los objetos excitan nuestras facultades de conocer: empezando por nuestros sentidos, pasan a representaciones, etc., y así en adelante se irá hasta que nuestras **inditaciones** produzcan un conocimiento. Podemos, pues, asegurar que el conocimiento se inicia en la experiencia.

Pero surge aquí la cuestión siguiente: ¿no intervendrán facultades inherentes a la parte conocedora (mediante su capacidad cognoscitiva)?. De responderse afirmativamente el conocimiento resultaría producto de una relación: excitaciones y capacidad cognoscitiva. La existencia del factor no experiencial requiere un examen acucioso para su demostración, y no se podría responder sin él.

Es, pues, de gran necesidad establecer si hay un conocimiento independiente de la experiencia y de toda impresión sensible.

A este posible conocimiento lo llamamos “a priori” por oposición al experiencial, denominado “a posteriori”. El primero es a priori porque no es resultado de ninguna experiencia, y, más aún, es previo a ésta; el segundo es, precisamente, a posteriori **por que** es consecuencia de la experiencia, es posterior a ella.

Y, finalmente, dentro del conocimiento a priori, llamamos “conocimiento a priori puro” al que en su estructuración no presenta ningún elemento de experiencia. Así tenemos que: Todo cambio

tiene una causa, será un conocimiento a priori, mas no puro **por que** si bien la noción de causa es a priori, el otro elemento, el cambio, es producto de la experiencia.

Determinación del conocimiento a priori.-

Se puede establecer la existencia de conocimiento a priori partiendo de dos características imposibles de ser aplicadas a los conocimientos a posteriori.

a.- *La necesidad*, la proposición no empírica se nos presenta con un carácter de necesidad basado en la imposibilidad de lo contrario, nos dice, —nuestra razón lo certifica—, que lo opuesto a ella es absolutamente imposible; esta tipicidad no tiene la proposición a posteriori, ésta nos muestra algo que es así, —que es de tal o cual manera—, mas calla y no predica de lo contrario.

b.- *La universalidad*, la proposición a priori aparece revestida de universalidad total, absoluta, basada en su propia necesidad exige su cumplimiento en todas las circunstancias y lugares. La proposición a posteriori también nos trae universalidad, pero la suya es una universalidad derivada de la no observación de excepción a una ley establecida; es, pues, una universalidad por no excepción y no por necesidad, cabiendo la posibilidad de que pueda no cumplirse.

Ejemplos para acreditar lo dicho nos dan las matemáticas, y si se quiere de otro tipo tomemos uno del propio “entendimiento”. Todo cambio necesita una causa. Podemos decir, todavía, que la misma experiencia se fundamenta en lo a priori; ya que si ello es esencialmente contingente, ¿de donde obtiene su certidumbre y tendencia universalista?.

Pero no es sólo en los juicios donde **éste** es válido, pues aún lo es en los conceptos; porque si a un concepto le quitáramos todo lo experiencial que tiene, —forma, color, olor, temperatura, etc.,— aún le quedaría su **substancia**, —en cuanto existencia pensable—, como base sobre la que se rigen las experiencias.

Necesidad de una ciencia que se ocupe del conocimiento a priori.-

Es una realidad la existencia de conocimientos que, mediante conceptos que no pueden ser representados en la experiencia se emancipa de ésta, y parecen ampliar nuestros conocimientos más allá

de sus límites. Estos conceptos son materia para la razón pura, la cual no puede soslayarlos; estos temas últimos son: Dios, libertad e inmortalidad; la ciencia que los estudia, la metafísica.

Pero ¿qué ha sucedido con esta ciencia?; simplemente que nunca se ha planteado: ¿Cómo son posibles los juicios a priori?. ¿Cuáles son su extensión, su legitimidad, su valor? Partiendo de que material es distinto del de la experiencia, ha dejado a esta de lado y estructurado sistemas imaginarios, que si bien algunos gozan de cierta armonía interna no por eso lo son menos. Si la metafísica ha sido lo que es hasta la fecha, —hasta Kant, se entiende—, entonces, pues, no es ciencia; urgiendo por tanto responder a las preguntas que no ha respondido la metafísica, y ésta será la misión que ha de cumplir la crítica.

C.- JUICIO ANALÍTICO Y JUICIO SINTÉTICO.-

En la relación que el juicio establece entre sujeto y predicado caben dos situaciones:

- a.- El predicado es la explicitación del sujeto; y,
- b.- El predicado añade algo nuevo al sujeto.

En el primer caso el predicado no hace más que explicar, analizar mediante el principio de contradicción, lo que se da en el sujeto como integrante necesario de él, sin añadirle, absolutamente, nada nuevo. Estos juicios explicativos los llamamos “analíticos” o explicativos; ejemplo: todo cuerpo es extenso.

En el segundo caso el predicado implica la anexión de un conocimiento nuevo al sujeto, el cual de sí no lo tenía; este incremento no se realiza por contradicción. Estos juicios pueden nominarse “sintéticos” o extensivos; por ej.: Todos los cuerpos son pesados.

En los juicios sintéticos hay que considerarse dos clases:

- a.- Juicios “sintéticos a priori”; y,
- b.- Juicios “sintéticos a posteriori”.

Veamos previamente los últimos.

Juicios sintéticos a posteriori.- Estos juicios pese añadir algo al sujeto se apoya en la experiencia, de ella saca sus deducciones. Por ejemplo, el concepto de objeto encierra: extensividad,

impenetrabilidad, forma, etc., pero no se lleva en él el concepto de pesantez, el cual es neto producto experimental. Ahora bien, gracias a la experiencia se puede hacer la síntesis del concepto *pesado* con el de objeto, porque si bien ambos no se dan analíticamente como uno, “se pertenecen, sin embargo, de una manera contingente como partes de un todo de la experiencia, que es un enlace sintético de **intuiciones**” (C. de R. P., pág. 80).

Juicios sintéticos a priori.— Como hemos visto el apoyo del juicio sintético a posteriori es la experiencia, aplicado a la cual el entendimiento realiza la síntesis a posteriori. Pero al considerar un juicio sintético a priori, por ejemplo: Todo lo que sucede tiene una causa, encontramos:

1.- Si bien el concepto de suceder es susceptible de sometimiento analítico, —**qué** es, **qué** se puede predicar de él, etc.—, el concepto de causa no está comprendido en él; y, por tanto,

2.- Cómo es, o cómo se realiza esta atribución de la causa al suceder.

Examinando la proposición hallamos que ésta encierra universalidad y necesidad, de lo que concluimos que su base no puede estar en la experiencia, pues ésta sólo produce una universalidad restringida, —particularidad—, y **sólo** es contingencial.

En conclusión en el juicio sintético a priori encontramos una ampliación del contenido del sujeto, lo que nos da un nuevo movimiento no contenido en aquél y el nuevo elemento incorporado reviste universalidad y necesidad; lo cual tipifica y da singular categoría a este tipo de juicios sintéticos a priori.

Esta última determinación encierra gran importancia, por cuanto y en tanto los juicios de la experiencia son todos sintéticos, simplemente, los que fundamentan las ciencias son juicios sintéticos a priori.

D.- JUICIO SINTÉTICO A PRIORI Y CIENCIA.

Los principios de todas las ciencias teóricas son juicios sintéticos a priori. Analicemos esto:

1.- *En las matemáticas.*— Los principios matemáticos son juicios sintéticos a priori. Esto contradice la manera usual de considerarlos, pues, se les toma como proposiciones analíticas, identificándolas con el razonamiento basado en la contradicción; ya que si bien se desenvuelven de acuerdo con este principio, exigencia de su carácter apodíctico—, la contradicción no se hace valer en el desenvolvimiento interno de cada proposición, sino en relación con otras proposiciones. El carácter a priori de estas proposiciones los hallamos en su *necesidad*, lo cual no les puede venir de la experiencia. Su cualidad sintética la vemos en que nos dan conocimientos que no se encuentran en el principio matemático del cual se parte; así, p. ej., en la proposición 7 más 5 no se da por ningún lado el resultado 12, para llegar a él se necesita de una “intuición”, esto es se necesita de una representación especial.

Igual situación tenemos en las proposiciones geométricas; por ej.: La recta es la distancia más corta entre dos puntos; en la noción de recta no hay ninguna cantidad, sólo tenemos la cualidad de no desviarse nada más, esa proposición tiene que resultar de una “intuición”.

No obstante en las matemáticas tenemos algunas proposiciones analíticas tales como $a=a$, el todo es igual a sí mismo; $a>b$, a , el todo es mayor que la parte, b . Pero estas proposiciones se las utiliza como nexos de razonamiento antes que como principios, y no obstante su valor analítico “estos axiomas, aunque valen como simples conceptos, son admitidos en matemáticas solamente porque pueden ser representados en la “intuición” (C. de R.P., pág. 82).

2.- *En las ciencias naturales (física).* Aquí de igual manera se presentan, en la ciencia pura, proposiciones sintéticas a priori, por ejemplo: En todos los cambios del mundo corpóreo la cantidad de materia permanece la misma; en esta proposición el concepto materia, analíticamente, no hallamos la persistencia como su componente, luego, pues, esta característica de un conocimiento nuevo, es decir, sintético; y, finalmente es un juicio a priori por la necesidad con que se nos presenta. Y lo mismo con las otras proposiciones de la física.

3.- *En la metafísica.* Las proposiciones metafísicas —aunque se la considera sólo como ciencia en ensayo—, no solo tratan de analizar los conceptos que de las cosas tenemos formados a priori sino que trascienden esta esfera, mediante las proposiciones sintéticas a priori; por ejemplo: El mundo debe tener un principio.

Así tenemos, pues, que también la metafísica consiste en proposiciones sintéticas a priori, por cuanto implica conocimientos nuevos con carácter necesario.

La importancia del juicio sintético a priori y la metafísica.-

“El verdadero problema de la Razón Pura se contiene en la pregunta; ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos a priori?”

Se puede decir que la metafísica se ha mantenido en un estado caótico por no haberse hecho esta pregunta, y a que no se ha hecho la distinción tajante y clara entre juicio analítico y sintético. Un vislumbre de esta diferenciación la hallamos en Hume, aunque éste se equivocó en la asignación de los juicios a las diferentes ciencias, ya que creyó, equivocadamente, que los juicios analíticos eran los juicios que originaban los principios matemáticos, —radicando aquí su firmeza—; en tanto que la metafísica la basó en los juicios sintéticos, —ampliadores del sujeto o productores de conocimiento—, y al hacer girar alrededor de la causalidad a los juicios sintéticos, y habiendo encontrado, según Hume, que la *casualidad* no era sino un producto imaginativo *nimbado de cierta necesidad* por la costumbre, se derrumbaba toda solidez del juicio sintético, fundado en tan endeble base, y con el juicio sintético **sintético** se derrumbaba toda la metafísica.

Esta afirmación de Hume no se hubiera producido de haber profundizado más en el problema, pues habría encontrado que la base de la metafísica son los juicios sintéticos a priori, y su penetrante espíritu no habría negado el valor de la metafísica al reducirle a una repetición de sí misma.

En la solución de este problema está, a su vez, la posibilidad del uso de la razón para fundar y reconstruir todas las ciencias cuyos contenidos encierran “un conocimiento a priori de sus objetos”. Planteándose el problema con las siguientes interrogantes: ¿Cómo es posible que la física pura? ¿cómo es posible la matemática pura? y

¿de qué manera es posible la metafísica como ciencia?; presentándose estas dos modalidades de interrogantes por cuanto las dos primeras se refieren a ciencias ya existentes, en tanto que la tercera incide sobre un campo que exige su estructuración científica.

El estudio que la Crítica ha de realizar conduce, pues, a la ciencia, en cambio al uso dogmático que de la razón se ha hecho sólo conduce a afirmaciones infundadas, las cuales siempre encontrarán listas otras para rebatirlas; conduciéndonos todo esto al escepticismo.

La Crítica de la Razón tiene como misión el estudio de sí misma, de los problemas que se presentan “en su seno y se presentan no por la naturaleza de las cosas que difieren de ella, sino por la suya propia”.

Pero luego de que pueda determinar las facultades que tiene con relación a los objetos de su experiencia, podrá decirnos hasta dónde puede ir fuera de ese campo; sólo recién se verá si le es posible a la razón rebasar los límites de la experiencia.

Bibliografía.-

Kant, Crítica de la Razón Pura: Prólogos, Introducción; traducción de don José del Perojo, Sopena, 1952.

Kant, Prolegómenos a toda metafísica del porvenir: Parágrafos: V, sobre el conocimiento puro; VI a XIII, sobre la posibilidad de la matemática; y, LVII a LX, sobre la metafísica.- Daniel Jorro Editor, Madrid, 1929.-

E. Cassirer, El problema del conocimiento, T.II, L.VII.- Fdo. de Cultura Económica, 1956.

E. Cassirer, Kant, vida y obra: Cap. II.- Fdo. de Cultura Económica, 1948.

J. Maréchal, La Crítica de Kant: L. II, Cáp. Ia III.- Ediciones Penca,
Buenos Aires, 1946.

II.- TEORÍA KANTIANA DEL ESPACIO

Para continuar con el tema tratado se expondrá la teoría kantiana del espacio, la misma que constituye su temática fundamental; aquí, también, como en la parte anterior nos ceñiremos estrictamente a la tesis de Kant, acudiendo preferentemente a su exposición en la *Estética Trascendental* de la *Crítica de la Razón Pura*. Quede dicho que no obstante formar el análisis del tiempo parte fundamental del estudio de la *Estética*, no nos referiremos a él por cuanto escapa a nuestras presentes intenciones.

Sigamos a Kant.

A.- CONCEPTOS PREVIOS.-

En nuestro camino es menester llegar a los elementos que serán materia del estudio de la *Estética Trascendental*, —“la ciencia de todos los principios a priori de la sensibilidad”, C. de R.P., pág. 90—, Espacio y Tiempo. Para lo cual hay que partir de una precisa forma de conocimiento, de la intuición.

Entre las diversas relaciones del sujeto con el objeto, la que representa la *intuición* es aquélla en la cual el sujeto y el objeto se relacionan inmediatamente, sin intermediarios, estableciéndose una comunicación directa. Ejemplos: constatación de este libro, de un triángulo, de tal o cual cualidad captada primariamente; verdura de esta hoja, forma de un objeto, etc.

Ahora bien, la intuición, —“medio de todo pensamiento”—, se produce porque tenemos *sensibilidad*, la cual es la capacidad receptiva del cognoscente para captar o sufrir las efecciones que le imprimen los objetos. El efecto que producen los objetos en la sensibilidad se llama *sensación*; e intuición empírica, —una forma de intuición—, la que se relaciona con el objeto mediante la sensación.

Dentro de la intuición empírica, llamamos *fenómeno* al objeto indeterminado que se da en la sensación y en éste, *materia del fenómeno*, lo que en el corresponde a la sensación; y *forma del fenómeno*, lo que tipificándole le permite sufrir una ordenación.

La materia del fenómeno la obtenemos a posteriori, la experiencia es la que el objeto en bruto, como masa productora de sensaciones en el cognoscente; no así la forma, la misma que implica

una acomodación a un ordenamiento que no puede darle la sensación, de aquí deriva que la forma sea a priori y, que por tanto, pueda considerársele independiente de toda sensación.

Estos elementos no sujetos a la sensación, que introducen una ordenación a la materia del fenómeno, se dan en representaciones puras, —intuiciones puras—, es decir en las cuales no hay absolutamente nada de sensación, esto es de intuición empírica. Por ejemplo, si quitamos a una representación de un cuerpo lo que le da la inteligencia —divisibilidad, fuerza, sustancia, etc. —, y lo que le da la intuición empírica, —color, dureza, etc.,— nos quedará siempre espacio y figura de lo representado. “Estos pertenecen a la intuición pura, que tiene lugar a priori en el espíritu como una forma pura de la sensibilidad y sin objeto real del sentido o sensación” (C. de R.P., pág. 90).

Se ha llegado, así, a establecer formas puras de la sensibilidad, encontrándose que son dos: Espacio y Tiempo. De éstos se ocupará la Estética Trascendental; pero debe haber otra parte de la ciencia que se ocupe de los pensamientos puros, la cual formará la lógica Trascendental. Nos ocuparemos sólo de aquélla, con la limitación antedicha pues ésta rebasa los límites de nuestro objetivo.

La Estética Trascendental en su estudio dará dos pasos:

1.- Separación de todo lo que el entendimiento pone en la sensibilidad; y,

2.- Quitar de ella lo que aporta la sensación.

Así solo queda la sensibilidad pura en sus dos formas, espacio y tiempo.

Concluidas estas consideraciones previas aboquémonos a la consideración del espacio en la doctrina kantiana.

B.- DEDUCCIÓN METAFÍSICA DEL ESPACIO.-

Las intuiciones que nuestro espíritu tiene de lo externo y de lo interno a nosotros, se dan sobre dos bases; el espacio y el tiempo. En el espacio se recortan las cosas externas a nosotros, presentándonos con determinada forma, dimensiones y posición en aquél que las sustenta. Pero para la presentación de los fenómenos inherentes al yo, a la persona, los fenómenos se deslizan sobre el fondo del

tiempo, pantalla fluida sobre el cual se alzan. Se debe anotar que así como el espacio no es susceptible de representación interna, de igual manera el tiempo no lo es de externa.

Ahora bien, ¿qué carácter presenta el espacio?

Para responder a esta interrogante metafísica sobre el espacio, se indicarán cuatro características que presenta:

El espacio:

1.- “... no es un concepto empírico derivado de la experiencia externa”, (C. DE R.P., pág. 91), pues la dación al sujeto de objetos externos, diferentes de él, implica la intuición del espacio sobre el cual los objetos se muestran; por tanto es anterior;

2.- “... es una representación necesaria a priori” (C. de R.P., pág. 91); es imposible concebir la no existencia del espacio, aunque se le puede considerar sin objetos; es concebible el espacio vacío más no objetos sin espacio, es, pues, el espacio una condición que posibilita la dación de fenómenos; es una representación a priori, fundamento indispensable, necesario, de los fenómenos externos.

3.- “... no es ningún concepto discursivo”, (C. de R.P., pág. 91). El espacio no es un concepto sacado de los espacios independientes, —producto, éstos, de las relaciones entre las cosas—, ya que estos espacios sólo son comprendidos en cuanto son *limitaciones* de un espacio único omnicomprendivo; y no que estas relaciones entre las cosas sea las formadoras de ese espacio único. Siendo, pues, **pues** una intuición pura la base de estas relaciones inter-cosas. (se podría anotar aquí que no se puede derivar el espacio en el cual se recortan, por relaciones entre cosas, ya que **é**stas implican el espacio en el cual se dan; basándose en las características 1 y 2).

4.- “... es representado como un ‘quantum’ infinito dado”, (C de R.P., pág. 92). Considerando el concepto como la unidad de caracteres de un número infinito de objetos, y dado en cada uno de ellos, se diferencia netamente del espacio al que consideramos conteniendo “una multitud infinita de representaciones”, forma en la cual no se puede considerar ningún concepto, ya que todos los espacios coexisten en el espacio infinito, no sucede así con el concepto. Por tanto el espacio no es ni puede ser considerado como objeto en forma alguna.

De lo expuesto se deduce que la primigenia representación del espacio es una intuición a priori, una forma de la sensibilidad pura.

C.- DEDUCCION TRASCENDENTAL DEL ESPACIO.-

Para que un concepto sea trascendental se requiere que opere como el principio sobre el cual se pueden basar conocimientos sintéticos a priori; lo cual implica:

- 1.- Que realmente emanen en él; y,
- 2.- Que sólo pueden explicarse por él.

Partiendo de que la geometría es la ciencia que sintética y a priorísticamente determina el espacio, —da conocimientos nuevos y por tanto no puede basarse en conceptos analíticos, siendo por ello sintética; y a priori, por exigencia de su carácter apodíctico— interroguémonos, ¿qué fundamento le corresponde? Pues, la respuesta simple y concreta es que la geometría ha menester de una intuición pura de lo externo, intuición que, anterior a los objetos que en ella se dan, permite determinar el concepto de los mismos a priori en cuanto forma y extensión.

Solo, por tanto, se podrá basar la geometría concediendo la explicación de la existencia en el espíritu de una capacidad formal de ser afectado por el objeto, “y de recibir la ‘representación inmediata’ de los mismos, es decir, la intuición, como forma del ‘sentido’ exterior en general, (C. de RP., pág. 92).

Lo dicho prueba la trascendentalidad del espacio como fundamento de la geometría.

De las exposiciones metafísica y trascendental del espacio se concluye, pues, evidentemente que la representación primaria del espacio no es otra que una forma de intuición a priori de nuestra sensibilidad pura y por tanto una forma de nuestra “subjetividad trascendental”, subjetividad no en cuanto elemento personal, si en tanto forma general de la conciencia del cognoscente, en cuanto elemento de la relación sujeto-objeto del conocimiento.

D.- CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES DE LO PRECEDENTE.

a.- “El espacio no es más que la forma de los fenómenos de los sentidos externos”; es decir que es la única “condición subjetiva” por medio de la cual nos es posible la intuición externa. En esta su cualidad subjetiva se basa su poder contener, antes de toda experiencia, los principios de todas sus relaciones propias.

b.- El espacio es una intuición pura de nuestra sensibilidad que fundamenta conocimientos sintéticos a priori. La consideración contraria del espacio trae como consecuencias:

1.- De considerar el espacio como *real absoluto*; Una noción infinita que sin existencia real comprende lo que sí es real, las cosas; y,

2.- De considerar el espacio como relación entre las cosas: Niegan resultados válidos a priori de las matemáticas, y surge la imposibilidad de fundamentar el carácter necesario y universal de la ciencia.

c.- La consideración del espacio como forma pura de la sensibilidad nos lleva a la conclusión de que sólo captamos los fenómenos de las cosas externas y no las cosas mismas; las cosas en sí mismas nos son desconocidas, pues todas las cosas se nos presentan únicamente pasando a través de nuestra capacidad receptiva externa.

d.- Otro argumento en apoyo del carácter fenoménico de nuestros conocimientos es que éstos nos dan como resultado establecimiento de simples relaciones entre lo conocido, en tanto que las cosas en sí no pueden ser conocidas en las relaciones sino en ellas mismas.

e.- Conocemos “fenómenos” no “apariencias”. Al decir que sólo conocemos los fenómenos de las cosas, no las cosas mismas, no queremos decir en forma alguna que conocemos “apariencias” de las cosas; tal error emana de no considerar las formas de la sensibilidad mediante las cuales las cosas se dan a nuestro conocimiento.

Para terminar esta exposición sobre la teoría kantiana del espacio, examinemos la apreciación que sobre la unidad del espacio

hace Kant en la lógica Trascendental parágrafo 26 y en la nota aclaratoria del mismo.

El espacio como *unidad objetiva*, tal como la precisa la geometría, es una elaboración del “entendimiento; el espacio, como simple forma de la intuición externa se presenta como una diversidad extensiva, sobre la cual opera el entendimiento componiendo esta diversidad y dándonos como resultado la unidad representativa que conocemos como forma pura de la sensibilidad, para la dación de los fenómenos externos a nosotros. Pues bien, en la Estética Trascendental se da por anticipado que tal unidad ya pertenece al espacio, sólo para indicar que es anterior a todo concepto del entendimiento, aunque sea una síntesis que no pertenezca a la sensibilidad; pero como tal calidad es dada *primitivamente*, —antes de que a nosotros aparezcan los conceptos del entendimiento—, el espacio, esta unidad pertenece a él “y no el concepto del entendimiento”.

Con lo dicho hasta aquí queda concluida nuestra exposición de la tesis kantiana del espacio; en la cual, reiteramos, se ha buscado la estricta adecuación a aquélla.

E.- EUCLIDES Y NEWTON EN LA CONCEPCIÓN KANTIANA.-

Kant sostenía, y fue directriz de su pensamiento, como quedó expuesto al tratar de la “revolución copernicana”, que si la metafísica quería iniciarse en el “seguro camino de la ciencia” debía reconstruirse metodológicamente, teniendo como paradigma a la matemática y a la física, ciencias que gracias a su fructífera metodología seguían un camino seguro y progresivo. Pero, aparte esto del método, el pensamiento kantiano tomó además de esas ciencias cuestiones que sirvieron de fructíferas bases para su estructuración.

Véámoslo a través de la geometría euclidiana y la física newtoniana, puntos culminantes e insuperables de los tiempos kantianos.

La geometría euclidiana.-

¿Cómo se estructura esta geometría?

Los elementos de Euclides establecen:

1.- *Definiciones*: determinaciones nominales que no buscan otra cosa que la precisión y claridad en el lenguaje sobre los elementos con los cuales se ha de operar. Tales: “El punto es aquello que no tiene parte”, o La resta es aquella que es exsequo de todos sus puntos”: definiciones I y IV.

2.- *Axiomas*: principios de razonamiento que han de presidir las construcciones geométricas: “las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí”, “El todo es más grande que la parte”; I y VIII axiomas.

3.- *Postulados*: petición de permisiones para, introduciendo sentido dinámico a las definiciones, posibilitar la construcción de la geometría; estos postulados constituyen la piedra de toque de la geometría euclídea. Entre ellos tenemos:

I.- Que sea pedido trazar desde un punto cualquiera a un punto cualquiera una línea recta.

II.- Que sea pedido prolongar en línea recta y en continuidad una línea recta.

III.- Que sea pedido describir un círculo cualquiera y de distancia (es decir radio) cualquiera.

IV.- Que sea pedido que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V.- Que sea pedido que si una recta se encuentra a otras dos rectas (situadas en el mismo plano) forma de un mismo lado ángulos interiores cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encuentran del lado del cual la suma es inferior a dos rectos. Este es el famoso postulado de las paralelas.*

Pues bien con estos elementos se levanta el edificio de la geometría euclidiana mediante el estudio de las relaciones posibles de sus elementos sin más exigencia que su lógico desenvolvimiento racional.

Esta forma de construir una ciencia de la solidez presentada por

* Las definiciones, axiomas y postulados de Euclides han sido tomados de L. Brunschwiog. Etapas de la Filosofía matemática, pág. 111, 113 a 115 y 118.- Edit. Lautaro 1945.

la geometría, con sus caracteres de necesidad y universalidad, operó gran influencia en Kant, siendo ésta una de las fuentes de su convicción en la posibilidad de crear la ciencia a partir de elementos de elaboración mental y con estricta prescindencia de lo experimental, elemento de suyo perturbador e imposibilitador de la estructuración de esquemas definitivos de la ciencia.

En la geometría euclidiana hubo de hallar Kant el paradigma de un sistema definitivo y total, tal cual él buscaba para la filosofía; una ciencia que una vez fundada sigue un continuo curso de desarrollo y progreso.

Por otra parte, Kant hubo de encontrar en esta ciencia, para él completa y definitiva y la única geometría posible, una inspiración a la vez que demostración incontrovertible de su espacio infinito e inmutable; y siendo, además una ciencia fundada íntegramente en la racionalidad, —por tal se la tenía—, inmejorable prueba de la subjetividad del espacio, tal cual él sostenía.

La física newtoniana.-

Si bien la monumentalidad de la obra de Newton es bastante para merecer grandísimo respeto científico, sus discípulos han admirado en él más que sus logros su método fructífero desenvuelto magistralmente: ya que en su obra el método inductivo no solamente encuentra sus más altos resultados, sino que además alcanza por primera vez su expresión y concreta plasmación lógica.

Tal como en los Elementos, Newton en su *Philosophise Naturalis Principia Mathematica* empieza por sentar definiciones que precisan los hechos observados, y que luego traducidos en conceptos físicos serán elementos para la estructuración de la ciencia.

Definiciones:

1.- La cantidad de materia es la medida de la misma, que se origina por el producto de la densidad por el volumen.

2.- La cantidad de movimiento es la medida de la misma, que se origina por el producto de la velocidad por la cantidad de la materia.

3.- La... innata de la materia, es un poder resistir, según el cual todo cuerpo, abandonado a sí mismo, persevera en su estado presente, sea de reposo o moviéndose uniformemente sobre una recta.

4.- Una fuerza impresa es una acción ejercida sobre un cuerpo con el objeto de modificar su estado, sea el de reposo o de movimiento uniforme rectilíneo.

5.- Una fuerza centrífuga es aquella por la cual los cuerpos son atraídos o empujados, o tienden de cualquier manera hacia un punto como centro.

A continuación del establecimiento de estos objetos básicos siguen las leyes del movimiento; principios que norman el desenvolvimiento de la física teórica:

I. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que alguna fuerza impresa sobre él lo obligue a modificar su estado.

II. La variación del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se efectúa en la dirección de la recta según la cual se imprime la fuerza.

III. A toda acción se opone siempre una reacción igual y contraria, o de otro modo, las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales entre sí y dirigidos en sentido contrario.

El corolario I establece: Un cuerpo sometido simultáneamente a dos fuerzas describirá la diagonal del paralelogramo, en el mismo tiempo que las fuerzas por separado describirán los lados.*

Sobre estas bases, aplicando la inducción, la experimentación y todo el instrumento matemático, se levanta la ciencia natural más perfecta, la ciencia física.

El método newtoniano que tan excelentes resultados tenía a su haber, influenció el pensamiento de Kant, **cuyas** son estas palabras: “El método auténtico de la metafísica coincide, en el fondo, con el introducido por Newton en la ciencia de la naturaleza y que ha dado, en ésta, resultados tan fecundos”, (citado por E. Cassirer, Problema del conocimiento, T. II pág. 543; Fdo. De Cultura Económica, 1956).

Y no podía ser de otro modo, Kant tenía ante sí los resultados de la física clásica, ciencia que tomó como ejemplo de conocimiento natural y debía pues considerar en muy alto el método empleado en

* Las definiciones y leyes del movimiento han sido tomadas de Sedgwick y Tyler, Breve historia de la ciencia, pág. 328-29 Ed. Argos.- Buenos Aires, 1950.

esa ciencia. Por otro lado la física, también como la geometría, le mostraba lo fructífero de fundar una ciencia sobre sólidas bases teóricas, y más aún considerando que la física era y es un conocimiento que tiene que habérselas directamente con la experiencia que es su materia de estudio.

Además la concepción misma que Newton tuvo sobre el espacio influenció en el pensamiento kantiano; es sabido que Kant siguió rigurosa y críticamente el desenvolvimiento y debate que sobre el espacio se desarrollaron en su tiempo, en las cuales la idea de Newton, al respecto, se ventilaban como de las más conspicuas. Cabe decir que, precisamente, al calor de estas consideraciones se fue gestando el concepto kantiano de espacio.

La mecánica newtoniana consideraba al espacio como una extensividad en la cual se daban y desplazaban las cosas, ya que estuvieran en reposo o en movimiento, respectivamente; mas no había vinculación alguna entre las cosas y el espacio, fuera de **este** servirles de fondo, ni menos había entre ellos interrelaciones. Por otro lado la mecánica clásica consideraba a la masa como único elemento de la materialidad de las cosas; además tenía el espacio, tiempo, masa, fuerza, movimiento, etc., como totalmente independiente uno del otro y en forma alguna interferentes entre sí; lo único que entre ellos cabía era una relación entre los de un mismo tipo, masas con masas, fuerzas con fuerzas, etc. Esto es lo que se conoce con el nombre de *propiedad aditiva* y *propiedad de superposición*, respectivamente.

Todo lo cual conocido de Kant ha debido influenciar su pensamiento, coadyuvando a su concepción de espacio. Pero en tanto que **ha** Newton, estas mismas consideraciones y exigencias científicas, lo llevaron a concebir un espacio absoluto, que al revestirse de matices metafísicos devino en la “omnipresente sensibilidad divina” newtoniana; Kant, **en, , cambio** recibiendo un espacio absoluto sin relación con las cosas, —concepción de la mecánica clásica—, y dadas las dificultades para él derivadas de concebir el espacio como algo externo* y siguiendo su “revolución”

* Ver punto b de título D, pág. 32.

copernicana nos da un espacio como forma pura de la sensibilidad, estrato inferior de la razón que se abre al mundo.

De lo dicho, se desprende que, es innegable la influencia que sobre el pensamiento de Kant ejercieron la geometría de Euclides y la Física de Newton a quienes debe bastante su filosofía; y a quienes tenía en alta estima. A los ojos de Kant, dice Brunschwicg, la lógica de Aristóteles agotaba la ciencia de las combinaciones formales; y en la misma forma, parece que la aritmética de Pitágoras, la geometría de Euclides, la física de Newton, agotaban la ciencia racional de la naturaleza, como si, para legitimar el saber, fuera necesario, no sólo enlazarlo al espíritu del derecho, sino también encerrarlo en la letra de un código”, (ob. cit., pág. 311).

Pero el progreso histórico del conocimiento, pasando sobre venerables nombres y tradiciones, ha rebasado la geometría euclidiana y la física newtoniana; y, hoy se nos presenta una más amplia y profunda ciencia.

Queda aquí concluida la parte necesaria para exponer la teoría kantiana del espacio, debiendo de ocuparnos de otros temas.

Bibliografía.-

Kant, Crítica de la Razón Pura: Estética Trascendental

E. Cassirer, El problema del conocimiento: T. II, L. VI (I y II) y VII.

E. Cassirer, Kant, vida y obra: Cáp. III.

J. Maréchal, La Crítica de Kant; L. III, Cáp. I.

León Brunschwicg, Etapas de la filosofía matemática: Cáp. VI y XII.- Lautaro Buenos Aires, 1945.

A. Maxímov, Introducción al estudio contemporáneo de la materia y del movimiento: Cáp., II ED. Futuro.- Buenos Aires, 1946.

Jean Wahl, Tratado de metafísica: Parte IV, Cáp. II.- Fdo. De cultura Económica, 1960.

III.- EL ESPACIO Y SU CONSIDERACIÓN ACTUAL.

La tercera parte del presente trabajo, que empezamos a desenvolver, busca precisar la concepción que actualmente se tiene del espacio; con lo cual se quiere destacar la distancia que separa lo que hoy en día tenemos por espacio de lo que por tal tenía Kant. Para ello desarrollaremos nuestro tema en tres partes: consideración del espacio en la geometría, luego el espacio en la física actual y, finalmente, la concepción filosófica que sobre el espacio podemos deducir.

A.- CONSIDERACION ACTUAL DEL ESPACIO EN LA GEOMETRÍA.*

El análisis del problema del espacio, en la geometría, lo habremos de abordar dividiéndolo en la consideración del espacio en la geometría pura y en la geometría natural. Entendemos por geometría pura a la que se construye a partir de un plan hipotético constructivo, principalmente; en contraposición a ésta, entendemos por geometría natural aquélla que se conoce con el nombre de aplicada, o en decir de Einstein “práctica”, hemos tomado el término natural, usado por Hans Reichenbach, para señalar ciertas características que veremos en su oportunidad.

1.- GEOMETRIA PURA.-

Partamos de la siguiente simple y comprensible afirmación: La geometría se ocupa de las propiedades de las figuras del plano o del espacio. Pero tal delimitación encierra un número bastante grande y variado de propiedades exigiendo un principio de clasificación que ponga orden y concierto en tan ingente multiplicidad.

Pues bien, hay diferentes modos de división, así tenemos que uno de ellos es el método con el cual se opera en su manipulación;

* (pág.31).- En el desenvolvimiento de esta parte seguimos fundamentalmente “¿Qué es la matemática?” de Corant y Robbin, de la cual se toman figuras y demostraciones; así como “Filosofía científica” de H Reichenbach.

según esto se establece una distinción entre procedimientos “sintéticos” y procedimientos “analíticos”, entendiendo por los primeros aquellos en los cuales la geometría es construida sobre fundamentos exclusivamente geométricos. En tanto que los segundos son aquellos en cuyas construcciones geométricas intervienen coordenadas numéricas utilizando la técnica algebraica; este último procedimiento ha determinado la unificación de geometría, análisis y álgebra.

Pero para nuestro tema nos interesa, no la anterior clasificación, sino la establecida en base al *contenido* propio de los teoremas, e independientemente de los métodos usados para la demostración.

Veamos esto en la

a.- Geometría elemental de magnitudes.-

En esta modalidad de la geometría se establece una distinción entre teoremas que versan sobre congruencias de figuras, utilizando para esto el concepto de longitud y el de ángulo; contraponiéndolos a los teoremas sobre semejanza de figuras que utilizan exclusivamente el concepto de ángulo. Pero esto es diferenciación superficial, pues podemos decir que la geometría elemental versa sobre las *magnitudes*, ya sean éstas longitudes, medidas de ángulo o áreas.

Según esta geometría dos figuras son equivalentes “si son *congruentes*, es decir, si aún pueden obtenerse de la otra mediante un *movimiento rígido*, en el cual solo cambia la posición, pero no la magnitud” (R. Courant y R. Robbins, ¿Qué es la matemática?, pág. 177-8; Aguilar, 1955). Mas aquí surge la siguiente interrogante: ¿la magnitud, la congruencia y la semejanza serán propiedades fundamentales de las figuras geométricas?, ¿habrá otras propiedades mucho más profundas que resistan otros cambios?.

Supongamos, dibujada sobre un rectángulo de materia blanda, una circunferencia cruzada por dos diámetros perpendiculares, tal cual lo muestra la figura 1; pues bien, la circunferencia se habrá transformado en una elipse; y el ángulo entre los diámetros ya no

es recto.

Es propiedad de la circunferencia el que sus puntos equidisten del centro, propiedad que no corresponde a la elipse. Pero no han desaparecido todas las propiedades de la circunferencia al sufrir la compresión, así tenemos que el centro sigue dividiendo en dos mitades a los diámetros; tenemos, pues, una propiedad que se ha mantenido inalterable y que es común, por tanto, a circunferencia y a elipse.

Esto puede sugerirnos la idea de clasificar las figuras por las propiedades que permanecen las mismas pese a las transformaciones que sufren, (movimientos rígidos, compresiones, etc.). De aquí surge una situación importante: Que el conjunto de “teoremas referentes a esas propiedades será la *geometría asociada a dicha clase de transformación*” Courant, ob. cit., pág. 179). Fue el gran matemático alemán Felix Klein quien propuso la clasificación de la geometría siguiendo su plan de transformaciones; desde su famoso “Programa de Erlangen”, tal pensamiento ha tenido gran influencia.

Veamos ahora un tipo de transformaciones más amplias, las que se dan en la

b.- Geometría proyectiva.-

Desde antiguo los pintores han usado en su arte la perspectiva; la imagen pintada aparece como la proyección del original, teniendo como centro el ojo del pintor. La imagen así reproducida en el cuadro tiene diferentes magnitudes, mayor o menor amplitud de ángulo, etc., todo esto según el punto desde el cual se sitúa el artista; sin embargo la imagen pictórica es reproducción de la original, y en

aquella encontramos a ésta, y cómo es posible tal cosa?. Es posible porque hay un conjunto de propiedades que permanecen las mismas pese a la proyección que han sufrido; investigar todo el conjunto de propiedades “invariantes en la proyección” tal el objeto de la geometría proyectiva.

Precisamos la clase de transformaciones proyectivas de la siguiente manera:

“Supongamos dos planos π y π' en el espacio, no necesariamente paralelos, y hagamos una *proyección central*, (ver fig. 2), de π sobre π' desde un centro dado O no situado sobre π ni sobre π' , ni definiendo la imagen de cada punto P de π como aquel punto P' de π' tal que P y P' están sobre la misma recta que pasa por O. Podemos también efectuar una *proyección paralela*, (v. fig. 3), si hacemos que todos los rayos proyectados sean paralelos. Del mismo modo se puede definir la proyección de una recta L de un plano π sobre otra recta L' de π' desde un punto O de π o mediante proyección paralela” (Courant, ob. cit. págs. 180-1).

Llamamos, pues, *transformación proyectiva* a la representación de una figura sobre otra que se realiza mediante una proyección central o paralela o por una sucesión finita de tales proyecciones. Por tanto llamamos geometría proyectiva del plano o de la recta

el conjunto formado por todas las proposiciones geométricas que permanezcan invariables en una transformación proyectiva de las figuras; en tanto que la *geometría métrica* será el conjunto de proposiciones que tratan de las magnitudes de las figuras, magnitudes que permanecen invariables sólo en la transformación de los movimientos rígidos.

Fig. 5.- Proyección paralela

La geometría proyectiva ya no tratará de magnitudes, —longitudes, ángulos, áreas—, sino que operará con conceptos tales como punto, —el punto se proyectará en un punto—, línea recta, —la línea recta se proyectará en una recta—, incidencia, —un punto y una recta se dirán incidentes si la recta pasa por el punto o si el punto está en la recta—, y *razón doble*.

Este último concepto necesita explicación. La razón doble es la clave de la geometría proyectiva, así como la longitud de un segmento rectilíneo lo es para la métrica. Sucede que ninguna magnitud referida a solo tres puntos de una recta se mantiene invariable en una proyección; pero si contamos con cuatro puntos A, B, C, D de una recta, y los proyectamos sobre otra recta A', B', C', D', existe, recién entonces, una magnitud llamada *razón doble* de los cuatro puntos que conserva su valor invariable en la proyección. Esta razón doble no es una longitud ni un cociente de longitudes, sino la razón de dos cocientes; si consideramos los cocientes CA/CB y DA/DB, por definición, la razón doble de los cuatro puntos A,B,C,D, tomados en ese orden, es:

$$\frac{CA}{CB}$$

Demostramos que esta razón doble de cuatro puntos es invariable en la proyección, esto es que si A, B, C, D, y A', B', C', D', son puntos correspondientes, se verifica:

$$\frac{CA}{CB} =$$

Fig. 4.- Conservación de la razón doble en la proyección central.

La demostración se logra por medios elementales. Recordemos que el área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}$ (base X altura), y está también dada por la mitad del producto de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo comprendido. En la figura 4 tenemos:

$$\text{área OCA} = \frac{1}{2} h. \quad CA = \frac{1}{2} CA. \quad OC \text{ sen COA}$$

$$\text{área OCB} = \frac{1}{2} h. \quad CB = \frac{1}{2} CB. \quad OC \text{ sen COB}$$

$$\text{área ODA} = \frac{1}{2} h. \quad DA = \frac{1}{2} CA. \quad OD \text{ sen DOA}$$

$$\text{área ODB} = \frac{1}{2} h. \quad DB = \frac{1}{2} CB. \quad OD \text{ sen DOB}$$

De donde se deduce:

$$\frac{CA}{CB}$$

Luego la razón doble de A,B,C,D, depende únicamente de los ángulos subtendidos desde O por los segmentos que unen A,B,C,D. Como estos cuatro ángulos son los mismos para otros cuatro puntos cualesquiera A'. B', C', D' en los cuales A,B,C,D, pueden ser proyectados desde O, resulta que la razón doble permanece invariable en la proyección.

Así, concluyendo, diremos que la geometría proyectiva está formada por el conjunto de proyecciones que a través de las transformaciones operadas por la proyección mantiene invariables los conceptos de punto, recta, incidencia y razón doble.

c.- Axiomática y geometría no euclidiana.-

El método axiomático en geometría se remonta hasta los tiempos de Euclides ; aunque no es cierto que el pensamiento griego tratara exclusivamente en forma axiomática al menos tal como hoy lo entendemos, toda la geometría. Sin embargo esto, el prestigio de axiomática de que ha gozado la geometría de los Elementos es unánime.

El enfoque axiomático puede ser planteado así: Un sistema es axiomático cuando se puede deducir estrictamente un teorema, como consecuencia lógica, a partir de determinadas proposiciones previamente establecidas, las mismas que a su vez deben ser probadas; pero como tal regresión no puede ser infinita, hay la necesidad de ciertas proposiciones últimas llamadas postulados o axiomas que son aceptados como verdaderos y los cuales no necesitan prueba alguna. A partir de estos principios se prueban todos los teoremas por deducción lógica.

Si un campo científico cuenta con un número determinado de proposiciones previamente elegidas se puede deducir todo lógicamente, se dice que ese campo está presentado en forma axiomática. La estructuración de estas acciones primarias, axiomas, exigen determinadas condiciones como: ser *compatibles*, por lo cual se entiende que de ellos no sea posible deducir dos teoremas contradictorios entre sí; ser *suficientes*, esto es que de ellos se pueden deducir todos los teoremas; ser *independientes*, lo cual exige que ninguno de ellos sea deducible de los restantes; además deben ser, aunque no necesariamente, simples y pocos.

Los axiomas de la geometría dan una *definición implícita* para todos los términos “no definidos”, como punto, recta, incidencia, etc. Es importante para su aplicación que los conceptos y axiomas geométricos se correspondan con aserciones verificables físicamente; así, “punto” alude a un objeto muy pequeño como la huella de un lápiz, por ejemplo; en tanto “recta” es el producto de una abstracción a partir de un hilo tenso o de un rayo de luz. Claro está que estas propiedades concuerdan muy burdamente con aquellos conceptos, pero cabe que experimentos más adecuados los aproximen; además “si los axiomas formales no concuerdan aproximadamente con las propiedades de los objetos físicos, la geometría entonces apenas tendría interés. Así incluso para los formalistas, hay una autoridad aparte de la mente humana que decide la dirección del pensamiento humano” (Courant, ob. cit., pág. 230).

Hay un postulado de Euclides cuya “verdad” o cuya correspondencia con los hechos empíricos no es muy evidente; en el famoso postulado de la *paralela única*, el cual establece que “por un punto exterior a una recta dada se puede trazar *una y sólo una* paralela a la misma”. La característica de este postulado es hacer una afirmación sobre *toda* la extensión de una línea recta, la misma que es imaginada infinita en ambas direcciones; ya que el decir que son paralelas encierra el que por más que se prolonguen nunca se cortan. Todos los demás axiomas euclidianos, en cambio, se refieren a magnitudes finitas.

El no ser verificable este axioma planteó el intento de reducirlo a demostración, pues se le consideraba distinto a los demás, “al faltarle ese carácter de evidente plausibilidad que debería tener todo axioma de la geometría”. Ya Proclo, un comentador de Euclides, realizó el primer intento de demostración, hasta Saccheri y Lambert que intentaron demostrarlo por el método de admitir lo contrario y desarrollar los absurdos que de ellos se derivaban.

Por esos tiempos todo pensamiento geométrico que no estuviera acorde con la geometría euclidiana era un puro desatino; Kant, posteriormente, formuló que los axiomas de Euclides eran inherentes a la mente del hombre. “Esta creencia en los axiomas euclídeos como verdades inalterables, existentes en el reino de la intuición pura fue

uno de los dogmas básicos de la filosofía kantiana” (Courant, ob. cit., pág 251).

Los permanentes fracasos en la demostración de este postulado llevaron a la convicción que no era **diducible**, ni reductible a ningún otro, siendo, pues, un postulado totalmente independiente; mas ¿qué significa esta independencia?, clara y simplemente que era factible construir una geometría con puntos, rectas, etc., a partir de un número de axiomas entre los cuales no se **cuentan** el de las paralelas. Tal la obra, ya anticipada por Gauss, de Bolyni y Lobachevsky.

El método de Klein de la geometría hiperbólica.-

Para probar la compatibilidad de los sistemas anteriores, no basta la construcción de un vasto número de teoremas no euclidianos; se ha aprendido a estructurar “modelos” de tales geometrías, las mismas que cumplen todos los axiomas euclídeos menos el de las paralelas. El más sencillo de estos modelos es el de F. Klein.

Klein hizo su modelo partiendo de la geometría de Euclides, luego *rebautizó* algunos de estos objetos y relaciones; tal construcción tenía que ser tan libre de contradicción como el sistema del cual se originó. Este modelo puede comprenderse en base a algunos conceptos de la geometría proyectiva.

Se puede someter el plano a una proyección sobre otro plano, o mejor sobre sí mismo (por posteriores coincidencias del plano imagen con el plano originario); en general, un círculo y su interior se transforman en una sección cónica. Por otro lado existen infinitas transformaciones proyectivas posibles del plano en sí, de tal manera que un círculo dado y su interior se transformen en sí mismos. Por este tipo de transformaciones, puntos del interior o del contorno son llevados a otras posiciones, pero permanecen interiores o en el contorno del círculo. Estas transformaciones no dejarán invariables las formas de las figuras, y por tanto no serán desplazamientos rígidos del tipo usual; pero damos el paso definitivo al llamar a estas transformaciones “desplazamientos no euclidianos” de la geometría que se construye. Mediante tales desplazamientos es posible definir la congruencia: “dos figuras se dirán congruentes si existe un desplazamiento no euclídeo que transforme una en otra”.

El modelo que presenta, entonces, Klein de la geometría hiperbólica es el siguiente: “El ‘plano’ consiste sólo en los puntos interiores a un círculo; los puntos exteriores no se consideran, cada punto interior del círculo se llama ‘punto’ no euclídeo; cada cuerda del círculo se llama ‘recta’ no euclídea; los ‘desplazamientos’ y ‘congruencias’ se han definido anteriormente; unir ‘puntos’ y hallar la intersección de ‘rectas’ en el sentido no euclidiano sigue siendo lo mismo que en la geometría de Euclides” (Courant, ob. cit., págs. 232-3).

Fig. 5.- Modelo no euclídeo de Klein.

Es fácil demostrar que en el modelo de Klein se cumplen todos los postulados de Euclides, menos el de las paralelas. Que este postulado no se da en este nuevo sistema, se ve ya que por todo punto exterior a una recta, pueden trazarse infinitas rectas que no tienen ningún punto común con la recta dada. La primera recta es una cuerda euclídea del círculo, en tanto la segunda recta es cualquiera que pasando por el punto dado no corta a la primera recta dentro del círculo; ver fig. 5.

Geometría elíptica de Reimann.- La geometría euclidiana, tanto como la hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky llevan implícitas, tácitamente, que la recta es infinita. Pero habiendo abierto la geometría hiperbólica el camino de la libre construcción, se interrogaba si sería posible establecer una geometría no euclídea en la cual la recta fuera finita y cerrada. Claro está que tales geometrías

debían marginar el postulado de las paralelas, así como los axiomas de “estar entre”, (axiomas introducidos por Pesch, como exigencia de la noción de orden de los puntos de una recta).

Un sistema tal fue presentado por **Riemann**; probando así que tal tipo de geometría puede construirse de una manera carente de contradicción. Este tipo de sistemas geométricos ha tenido mucha importancia en la física moderna.

Fig. 6.- “líneas rectas” en la geometría de Reimann

Imaginemos, al efecto, “un mundo bidimensional”, consistente en la superficie S de una esfera en la cual definimos la *recta* con el significado de círculo máximo de la esfera. Este sería el camino para definir el mundo de un navegante, puesto que los arcos de círculo máximo son las curvas de longitud mínima entre dos puntos de una superficie esférica, y ésta es la propiedad característica de las rectas del plano” (Courant, ob. cit., pág. 237). En este sistema de **Reimann** dos ‘rectas’ siempre se cortan de tal modo que no puede trazarse ninguna paralela (que no sea secante) a una recta dada. En este mundo la geometría de las rectas toma el nombre de *geometría elíptica*; y la distancia entre dos puntos se mide por la distancia a lo largo del arco menor del círculo máximo que une tales puntos, en tanto que los ángulos se miden como en la geometría euclidiana.

Lo típico de una geometría elíptica es el hecho de no existir ninguna paralela a una recta determinada.

Generalizando la concepción de **Riemann**: Supongamos un universo consistente a una superficie curva en el espacio, no necesariamente esférica, y definiendo la “recta” que une dos puntos

como “la curva de menor longitud o geodésica que une dos puntos”, los puntos de la superficie pueden dividirse en dos clases:

1.- Puntos tales que en un entorno de cada uno la superficie es como una esfera, en el sentido de que está situado por completo de un mismo lado del plano tangente en ese punto; figura 7.

2.- Puntos tales que en un entorno de cada uno la superficie tiene la forma de silla de montar y está situada a ambos lados del plano tangente en el punto; fig. 8.

Fig. 7.- Punto elíptico.

Fig. 8.- Punto hiperbólico.

Los puntos que conforman la primera clase se llaman puntos elípticos de la superficie, pues, si el plano tangente se traslada un poco paralelamente a sí mismo, cortará la superficie en una curva elíptica; en tanto que los puntos de la segunda clase se llaman

hiperbólicos, por cuanto si el plano tangente se desplaza un poco paralelamente, se formará una superficie curva parecida a la hipérbola. También podemos precisar los puntos del primer grupo como pertenecientes a una curvatura positiva constante; en tanto que a los segundos como pertenecientes a una curva negativa constante.

La geometría basada en estas “geodésicas” en el entorno de una superficie será elíptica o hiperbólica; los ángulos de tales modelos de geometrías no euclidianas se miden por su valor euclídeo ordinario.

d.- Geometría topológica.-

Aquí nos encontramos frente a la más radical de todas las transformaciones que sufren las figuras, manteniendo siempre algunas propiedades invariantes. Esta geometría es un logro de los últimos cien años de investigación matemática.

Como quedó dicho la geometría elemental se construyó sobre la base de las magnitudes (longitud, ángulos y áreas), la geometría proyectiva está construida en base a ciertos conceptos (punto, recta, incidencia y razón doble) que la primera es una geometría levantada con las transformaciones de los movimientos rígidos en los cuales varían las magnitudes de las figuras, en tanto que la segunda es el producto de los conceptos invariantes a través de las transformaciones proyectivas. Pues bien, tanto las transformaciones rígidas como las transformaciones proyectivas no son otra cosa que “casos muy especiales de las llamadas *transformaciones topológicas*”.

Mas ¿en qué consiste una transformación topológica?

La transformación topológica de una figura geométrica A en otra A' está determinada por cualquier correspondencia entre dos puntos p de A y p' de A', transformación caracterizada por las dos

$p \longleftrightarrow p'$

propiedades siguientes:

1.- La *correspondencia es biunívoca*. Lo cual significa que a cada punto p de A corresponde un solo punto p' de A', y recíprocamente; y,

2.- La *correspondencia es continua en ambos sentidos*. esto es que si tomamos dos puntos cualesquiera p, q de A y movemos p de tal forma que su distancia al punto q tiende a cero, las distancias entre los puntos correspondientes p', q' de A' también tiende a cero, y recíprocamente.

Llamamos propiedad topológica a toda propiedad de una figura geométrica A que también se cumple para cualquiera otra figura en que A pueda transformarse mediante una transformación topológica; y geometría topológica, la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades topológicas de las figuras.

Supongamos un dibujante, si bien consciente, inexperto que al copiar una figura deforme las rectas en curvas, o altere los ángulos, distancias y áreas; pues bien, en este caso, aunque las propiedades de las transformaciones rígidas y de las proyectivas se alteran, las propiedades topológicas permanecerán inalterables; figura 9.

Fig. 9.- Superficies topológicamente equivalentes.

Los ejemplos mas intuitivos de transformaciones topológicas las tenemos en las *deformaciones*: Si tomamos una figura triangular de una materia blanda, podemos deformarla de la manera más arbitraria hasta obtener una circunferencia o una elipse, (fig. 9); pero todo esto se logra sin rasgar la lámina, ni hacer coincidir puntos distintos, pues ello iría contra las propiedades arriba establecidas. Así, pues, no se podría transformar topológicamente una circunferencia en un segmento lineal, ni un círculo en un círculo hueco, tal como aparece en la figura 10.

Fig. 10.- Superficies no equivalentes topológicamente.

Pero el concepto de transformación topológica es más amplio que el de deformación, puesto que si una figura es rasgada o vuelta a unir, ambas figuras seguirán siendo topológicamente equivalentes; fig. 11.

Fig. 11.- Nudos topológicamente equivalentes que no se pueden deformar uno en el otro.

Y con esto llegamos al término de la exposición sobre las diferentes geometrías, con lo cual sólo se ha buscado dar elementos para apreciar la geometría como particulares conjuntos de transformaciones operadas sobre las figuras geométricas; y sean transformaciones rígidas —geometría métrica—, transformaciones

proyectivas —geometría proyectiva—, o, finalmente transformaciones topológicas —geometría topológica—.

e.- Espacio y geometría pura.-

Veamos una definición de geometría; “Toda geometría es, por su concepto general, una *teoría de las invariantes* con respecto a un determinado grupo, y de la elección de estos grupos depende la estructura especial que aquélla adopte” (E. Cassirer, el problema del conocimiento, T. IV, pág., 54, Fdo. de Cultura Económica, 1948). Aclaremos los conceptos de *invariancia* y *grupo*; por el primero entendemos la falta de cambio en medio del cambio, esto es la *renuencia* de ciertas configuraciones a pesar de los cambios que ocasionan las distintas transformaciones. En tanto que por el segundo, *grupo*, entendemos “en conjunto de las operaciones unívocas A, B, C,..., de modo que dos operaciones cualquiera, A y B, combinadas, dan por resultado una nueva operación que forma parte del conjunto”, (E. Cassirer, ob. cit., pág. 50).

Mas preguntemos ahora ¿qué relación guardan el espacio y la geometría? La deducción de la geometría a partir de *un* propio conjunto de axiomas, y la posibilidad del establecimiento de diversas geometrías llevó a los matemáticos a plantear el problema desde un punto de vista extremo, llegando a sostener que: Un espacio no es más que un conjunto de objetos con un conjunto de propiedades llamadas estructura del espacio. Pues bien, ¿qué implica esta consideración? ¿es que realmente no tiene vinculación el espacio geométrico con el espacio real?; ¿será que el espacio geométrico es una libre creación con base axiomática, creando cada conjunto de axiomas su espacio peculiar?

Frente a la anterior concepción sobre el espacio coloquemos las palabras de Gauss; “Debemos confesar humildemente —escribe el citado autor en carta a *Bessel*— que así como el número es producto de nuestro espíritu *el espacio tiene también realidad fuera de él, una realidad a la que no podemos prescribir leyes ‘a priori’*” (citado por E. Cassirer, ob. cit., pág. 39; el *subrayado* es nuestro). Sí, Gauss es anterior al despliegue de la geometría, pero Gauss ya hubo trabajado sobre la geometría no euclidiana; que *el* *de* la axiomática es posterior a ese “príncipe de los matemáticos”, *mas* veamos lo

siguiente: que implica la afirmación de que cada geometría tiene su espacio, o que la geometría opera con el espacio geométrico; es **qué que** con esta aserción se niega la realidad del espacio, o simplemente es una transposición del espacio real, independiente, una transposición al plano matemático. O sucede que los matemáticos actuales tienen una concepción kantiana del espacio, como *forma pura de la sensibilidad*, y por tanto facultad de nuestra razón en su plano más ínfimo, la sensibilidad; y en consecuencia su espacio matemático es totalmente indiferente al espacio real, y su geometría es una libre y arbitraria creación de la razón.

Veamos qué piensa el gran geómetra francés Poincaré; en sus “Fundamentos de la Geometría” nos dice: “Nuestras sensaciones no pueden darnos la noción de espacio. Esta noción es construida por el espíritu con elementos que en el pre-existen, y la experiencia externa no es para él otra cosa que la ocasión de ejercitar ese poder, o, a lo sumo, un medio de determinar la mejor manera de ejecutarlo” (ob. cit. págs. 15-6, Editorial Ibero Americana, Buenos Aires, 1948). Y más adelante se hace la siguiente pregunta: “¿Debe considerarse esta categoría como ‘una forma de nuestra sensibilidad’?” y responde “No, si por ello se entiende que nuestras sensaciones, consideradas individualmente, no podrían existir sin ella” (ob. cit. pág. 18); y luego nos dirá: “El espacio sensible no tiene nada común con el espacio geométrico (ob. cit. pág. 24)

Desenvolviendo su tesis, Poincaré, desarrolló todo el proceso de los movimientos, su clasificación, la noción de grupo, de transformación, etc., hasta concluir en la construcción de geometría. Ésta resulta, para él, un sistema deductivo construido a partir de axiomas, el cual no tiene la realidad espacial más que como un estímulo de sus reflexiones; y cuando se trata de aplicar la geometría al mundo, a la física, nos presentará una serie de esquemas, e indagar sobre la verdad de uno frente a lo demás carece de sentido, pues lo único que nos guía en la aplicación de la geometría es la mayor o menos comodidad de los distintos sistemas geométricos: “En resumen: es nuestro espíritu el que suministra una categoría a la naturaleza. Pero esta categoría no es un lecho de **Procuste**, en el cual constreñimos violentamente a la naturaleza, mutilándola según la

exigencia de nuestras necesidades. Ofrecemos a la naturaleza una elección de lechos, entre los cuales escogemos la cama que va mejor a la talla” ob. cit. pág. 99-100).

Lo fundamental de lo dicho por Poincaré es que si bien para él el espacio sensible no significa nada para el espacio geométrico, reconoce la existencia de aquél, espacio que *no es una forma de nuestra sensibilidad*. Por otra parte, si bien la geometría es una estructura hipotético-deductivo cuya aplicación a la naturaleza sólo es cuestión de “comodidad”, (esto lo discutiremos al tratar sobre geometría natural), reconoce que la naturaleza física presenta exigencias a la geometría, exigencias que lo obligan a elaborar nuevos sistemas y que alguno o algunos se aplican mejor o, en decir de Poincaré, más “cómodamente” que otros, lo cual implica que la naturaleza tiene un espacio peculiar suyo distinto e independiente del geométrico.

Si desde este enfoque volvemos la vista a la concepción kantiana, veremos cuán lejos nos hallamos de esta concepción: el espacio no es, como era para Kant, una forma pura de nuestra sensibilidad y no hay en forma alguna una sola y única y absoluta geometría a la cual tenga necesariamente que someterse la naturaleza.

La concepción actual del espacio en la geometría ha rebasado, pues, la concepción kantiana en forma clara, precisa y definitiva.

n- dimensiones.- Problema bastante debatido ha sido el de las n-dimensiones. Si el mundo físico, el mundo real solamente presenta tres dimensiones, que es lo que se quiere decir con los términos cuatridimensional o n-dimensional. Para precisar esta situación digamos el camino más claro y expeditivo a nuestra finalidad, la representación de la geometría analítica.

Veamos: En el plano cartesiano para representar o localizar un punto necesitamos de dos datos, uno relacionado con el eje de las abscisas ($XO'X''$) y otro en relación con el eje de las ordenadas ($YO'Y''$), **pares** cuya intersección en el plano de las coordenadas nos dará una situación bidimensional; figura 12

Fig. 12.- Representación bidimensional de los puntos A, B, C.

Pues bien, en esta representación gráfica tenemos la representación de puntos hechos en un plano, considerando solo dos referencias (X, Y), tenemos que se dan en bidimensionalidad. Mas en lugar de referirnos a un “espacio” o a “espacios” podemos a una “multiplicidad”, término que para el caso es utilizable, por cuanto con el él se incide sólo en una variedad de referencias; así las cosas el plano vendrá a ser una multiplicidad de dos coordenadas, y por tanto nos hallamos ante una multiplicidad bidimensional.

El espacio que estudiamos en la geometría analítica de tres dimensiones puede ser considerada como una multiplicidad tridimensional, puesto que necesitamos tres coordenadas para fijar un punto en ella. Generalizando lo dicho, si necesitamos n coordenadas para fijar un punto, estaremos ante una multiplicidad n -dimensional.

Fig. 13.- Representación tridimensional de un punto P.

Con lo dicho la palabra “dimensión” con sus connotaciones múltiples es sustituido por la sencilla y clara idea de “coordenada”; y en lugar del término espacio, el matemático utiliza el concepto más general y concreto de “multiplicidad”.

Veamos lo expuesto operando con el conocido teorema de Pitágoras; éste dice: En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. Pero el teorema de Pitágoras lo podemos tener en tres dimensiones; así:

Fig. 14.- Teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

$$\text{Pues: } d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d^2 = c^2 + c^2$$

$$\text{y } c^2 = a^2 + b^2$$

Si esto (fig. 14) lo trasladamos a la geometría analítica de dos dimensiones según la cual la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, de coordenadas (x, y) y (x', y') , respectivamente, es:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} ; \text{ Figura 15}$$

Fig. 15.- Representación bidimensional de la distancia AB.

$$\text{Distancia AB} = (x-x')^2 + (y-y')^2$$

De manera similar la representación de la distancia entre dos puntos de la geometría analítica de tres dimensiones, esto es en las coordenadas (x, y, z) y (x', y', z') , respectivamente es:

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \quad ; \text{ figura 16}$$

Fig. 16.- Representación tridimensional de la distancia AB

$$\text{Distancia AB} = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Pues bien hasta aquí no hay dificultad intuitiva de representación; la dificultad surge al extender la representación a las cuatro o a las n dimensiones; pero de lo que aquí se trata no es de la capacidad de reproducción imaginativa, sino sólo de las relaciones de mayor número de coordenadas, sujetas a lógico desenvolvimiento. Así si hablamos de una multiplicidad cuatridimensional hallaremos que la distancia entre dos puntos, por ejemplo, el punto de coordenadas (x, y, z, u) y el punto de las coordenadas (x', y', z', u') estará representada por la fórmula:

$$(x-x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 + (u+u')^2$$

Y así en adelante agregando un literal más por ende nueva coordenada; y, en fin, hasta n-dimensiones, o número indeterminado de dimensiones o coordenadas.

$$(x-x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 + (u+u')^2 \dots + (n-n')^2$$

De todo lo dicho deducimos, pues, que el hablar en geometría de un numero de dimensiones mayor que tres nos hallamos sólo ante una facilitación de la operacionalidad matemática; en la cual **se ha precisa**, nítidamente, el carácter de estas dimensiones como simples “coordenadas” de una “multiplicidad”, término éste que reemplaza el de “espacio”, precisamente para evitar malas interpretaciones.

Y qué se **persigue** con esto?: *“La ventaja de este modo geométrico de expresión radica solamente en que hace hincapié entre algebraicas que son independientes de n, y que pueden imaginarse intuitivamente para $n \leq 3$.”* En muchas aplicaciones, el uso de tal terminología tiene ventaja de abreviar, facilitar y dirigir las consideraciones intrínsecamente analíticas. La teoría de la relatividad puede mencionarse como un ejemplo donde se ha logrado un importante progreso unificando las coordenadas espaciales $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ y la coordenada de tiempo $\underline{t}$, en un “suceso” perteneciente a una variedad tetradimensional “espacio-tiempo” de cuaternas de números x, y, z, t . Por la introducción de una geometría un euclídea hiperbólica en este esquema analítico, se hace posible describir con gran sencillez muchas situaciones de otro modo complejas. Ventajas análogas se han obtenido en mecánica y en física estadística, así como en campos puramente matemáticos” (Courant, ob. cit. pág. 241-2).

2.- GEOMETRÍA NATURAL.-

En tanto hubo una sola geometría, la de Euclides, el mundo tenía que someterse a ella; y la física tomándola como la única posible, en base a ella inició su estudio de la naturaleza. Kant, partiendo de aquellas nociones daba a la geometría euclidiana por la plasmación concreta de los principios eternos de la razón. Más pocos

años después de la muerte de Kant surgen las geometrías de Bolysi y Lobachevsky; geometrías que, poniendo de lado el V postulado de Euclides, habían construido sistemas geométricos tan coherentes y no contradictorios como el euclidiano. Ante tal multiplicación de los sistemas de la geometría cabe interrogarse, entonces, cuál de todas las geometrías es la que rige a la naturaleza? ¿La euclidiana, la de Lobachevsky-Bolysi o finalmente, la de **Riemann**?

Entre paréntesis diremos que los neo-kantianos, a la vista de tan variadas geometrías, quisieron ver en ello, precisamente, la demostración y confirmación de concepción kantiana del espacio como una manifestación de nuestra sensibilidad; intuición pura de nuestra sensibilidad sobre la cual nuestro entendimiento construía la geometría según Kant, las diferentes geometrías para los neokantianos. Mas como veremos, esto no es así puesto que hay otras exigencias.

Volviendo a nuestras interrogantes diremos que, ya Gauss trató de dilucidar la validez de la geometría euclidiana para el mundo físico, (recordemos que este insigne matemático, estudió y concibió las posibilidad de otras geometrías. Para sus fines trató de determinar el valor de la suma de los ángulos internos de un triángulo, el cual fue trazado tomando como referencia los picos de tres cumbres, pero dadas las reducidas dimensiones de los puntos referenciales, no le fue posible apreciar variación alguna que le diera por resultado un valor distinto a los 180° de la geometría euclidiana; concluyendo, por tanto, la validez de la geometría de Euclides para el mundo físico. Destaquemos de paso que, para Gauss se planteaba la necesidad de esta verificación por cuanto, según lo anotamos con anterioridad, la geometría tenía que habérselas con un espacio el cual la razón no podía “prescribir leyes a priori”, según sus palabras.

Pero pudo darse el caso de que el experimento de Gauss arrojara una diferencia de valor, esto es que la suma de los ángulos le hubiera dado un resultado diferente, mayor o menor, a los 180° . Supongamos que se hubieran tomado rayos de luz como lados del triángulo utilizado, pues en este caso, considerando grandísimas distancias, nuestro triángulo hubiera arrojado un valor mayor que 180° para la suma de sus ángulos internos. Pues bien, aun en este caso se podría

considerar que los rayos luminosos habían sufrido curvamiento debido a “fuerzas universales”, y corrigiendo la desviación someter nuestras observaciones a la geometría euclidiana.

Con la corrección anterior habríamos hecho lo que propiciaba Poincaré, quien sostenía que la geometría, —ciencia hipotético-deductiva pura—, al hacerse ciencia aplicada llevaba al mundo el paso de su carácter deductivo; pero que al enfrentarse a la realidad tomaba de ésta lo que fuera posible de un total sometimiento, construyendo con este material las diferentes ciencias; mas quedaba una parte no sometible totalmente a las leyes rigurosas, la misma que presentara un carácter perturbador. Frente a esta parte, a este elemento empírico, no quedaba otra cosa que su corrección en la medida de lo posible para así hacer factible la estricta deducción. En el caso concreto del mundo físico y la geometría euclidiana, Poincaré propugnaba la corrección de los fenómenos físicos para mantener la validez de la geometría euclidiana, considerando la mayor sencillez euclídea, a la vez que mantenía el carácter convencional de la geometría.

Pero, cuál es la causa de estas consideraciones de Poincaré y de otros geómetras? Simplemente que, el objeto de la geometría es el cuerpo geométrico, inalterable; en tanto que el de la física, el de la experiencia, lo es el “cuerpo prácticamente rígido”, no totalmente por que se halla sujeto a los cambios que le imponen la temperatura, las fuerzas exteriores, etc. Para valorar esta situación escogen un conjunto de axiomas geométricos (G), y otras partes seleccionadas de experiencia (P) y sumando estos conjuntos $(G) + (P)$ elaboran la geometría aplicada, la geometría física; considerando a sus conjuntos seleccionados como posiciones arbitrarias, como convenciones a partir de las cuales es factible levantar la ciencia física.

Queda, pues, sentarse que la geometría al aplicarse tiene que operar con “cuerpos prácticamente rígidos”. Por otra parte que: “Toda geometría práctica descansa sobre un fundamento que vamos a bosquejar. Llamaremos *recta* a la suma de dos señales marcadas sobre un cuerpo prácticamente rígido. Imaginemos dos cuerpos prácticamente rígidos sobre cada uno de los cuales se haya trazado

una recta. Estas dos rectas están consideradas como *iguales*, si las señales de la una coinciden de manera permanente con las de la otra.

“Si se comprueba que dos rectas son iguales en un momento dado y en un lugar cualquiera, ellas serán siempre y en todas partes iguales” (A. Einstein, Geometría y Experiencia, pág. 110, Ed. Ibero-americana, Buenos Aires, 1948).

Analicemos el carácter “convencional” que Poincaré atribuye a la geometría, y la “comodidad” de la Geometría aplicada.

“Supongamos que las observaciones empíricas son compatibles con las dos descripciones siguientes:

Clase I

“a.- La geometría es euclidiana, pero hay fuerzas universales que deforman los rayos de luz y las varas de medición.”

“b.- La geometría es no euclidiana y no hay fuerzas universales” (H. Reichenbach, la filosofía científica, pág. 128; Ed. Fondo de Cultura Económica, 1953).

Es indudable que ambas descripciones pueden considerarse como equivalentes, pues ambas no son más que dos distintos lenguajes que se refieren a la misma realidad.

Supongamos ahora otro mundo, sujeto a las siguientes descripciones:

Clase II

“a.- La geometría es euclidiana y no hay fuerzas universales.

“b.- La geometría es no euclidiana, pero hay fuerzas universales que deforman los rayos de luz y las varas de medición” (H. Reinchenbach, ob. cit. pág. 128).

También estas dos descripciones son equivalentes pero no podríamos decir en forma alguna que las descripciones I y II se refieren a los mismos mundos, por más que ambas se refieran a clases de descripciones. Y mas habiendo descripciones equivalentes lo que se trata de buscar y determinar es la descripción que se ajuste a lo objetivo, no simplemente la más cómoda, pues sólo puede haber

una que nos describa certeramente el mundo en cuestión; y la determinación sólo sería dada por la experiencia.

El problema reside, pues, en encontrar la geometría que sea el exponente más fiel de la peculiar estructura espacial del mundo o la región experimental estudiada, tal sería el “sistema normal”, representante de las descripciones de su clase, que haciendo desaparecer las “transformaciones universales” sea suficiente a describirnos el mundo dado, ésta sería una *Geometría natural*.

Lo dicho no implicaría que no pudiera usar una geometría euclidiana para las dimensiones restringidas, y que una geometría no euclidiana rigiera para los rayos de luz; puesto que esto implicaría que para nuestros efectos prácticos ambas serían utilizables, máxime si tenemos en cuenta que principio fundamental de las geometrías no euclidianas es que, en las distancias pequeñas se comportan de igual manera que la euclidiana, llegando a confundirse con ella.

Lo fundamental de lo expuesto es que sólo la refrendación empírica puede dar validez a la geometría natural; y esta confrontación empírica, tal como lo mostró Gauss, nos dice que la geometría de las distancias restringidas es euclidiana; en tanto que la geometría de las distancias astronómicas es no euclidiana, tal ha sido el aporte de la relatividad.

Aparte esta adición a la teoría del espacio, la concepción einsteniana ha aportado otra de mayor importancia: Siendo, según su teoría, las causas de la desviación de la geometría euclidiana, las fuerzas de gravitación que se originan en las masas de las estrellas; en la vecindad de las estrellas la desviación es mayor. Así se ha establecido por Einstein, una relación entre geometría y gravitación; esta afirmación, probada en el eclipse de sol de 1919, demuestra claramente el carácter empírico del espacio físico.

Concluyendo: “El espacio no es una forma de ordenación por medio de la cual el observador humano construye el mundo, es un sistema que formula las relaciones de orden que existen entre los cuerpos sólidos que cambian de un lugar a otro y los rayos de luz, expresando así una característica muy general del mundo físico, que constituye la base de todas las otras medidas físicas. El espacio no es subjetivo, sino real. Este es el resultado del desarrollo de las

matemáticas y la física modernas. Y aún cuando parezca extraño, esta larga línea histórica conduce al fin de cuentas al punto de partida. La geometría principió como una ciencia empírica con los egipcios, se convirtió en ciencia deductiva con los griegos, y finalmente ha vuelto a convertirse en ciencia empírica después de que un análisis lógico de la mayor perfección descubrió una pluralidad de geometrías, una de las cuales, y sólo una, es la geometría del mundo físico” (H Reinchenbach, ob. cit., pág. 131).

Hasta aquí quedan concluidas nuestras consideraciones actuales sobre el espacio en la geometría.

B.- CONSIDERACION ACTUAL DEL ESPACIO EN LA FÍSICA.-

Desenvuelta la parte referente a la consideración actual del espacio en la geometría, cabe ahora la que respecta a la física; para el desenvolvimiento de la consideración actual del espacio en la física dividiremos, también, nuestro tema en dos partes: la primera, referida a la física relativista; y, la segunda, a la física de los cuantos.

1.- EN LA FÍSICA RELATIVISTA.*

En el tratamiento de la física relativista desenvolveremos un enfoque histórico, en cuanto se partirá del experimento de Michelson, al cual diera Lorente la interpretación de la transformación que lleva su nombre; luego será considerada la teoría relativista restringida de Einstein, para ver a continuación el aporte de Minkowsky, concluyendo en la relatividad generalizada. En nuestra exposición sólo serán tocados aquellos puntos necesarios a nuestro propósito, la dilucidación del espacio en la física relativista; tratando, claro está, de dar una ajustada exposición de la teoría einsteiniana.

Empecemos:

* Para el desarrollo de esta parte nos ceñiremos, fundamentalmente, a las memorias de Lorente, Minkowsky y Einstein, notas y comentarios que sobre aquellas desenvuelve J.D. García Bacca, en su “Filosofía de las ciencias, Teoría de la relatividad”; Ed. Séneca, 1941.

a.- La transformación de Lorentz.-

La física clásica, en su desenvolvimiento, introdujo la noción del *éter*, como la materia sutil que llenando el espacio interestelar servía a la propagación de la luz.

Maxwell planteó, cuestión lógica teniendo en cuenta la existencia del *éter*, que el tiempo empleado por la luz para recorrer una distancia AB, en las direcciones de ida y vuelta, tenía que ser desigual al empleado en el caso que el desplazamiento se operase sin arrastrar el *éter*.

El experimento correspondiente fue realizado por Michelson en el año 1881. El aparato del cual se sirvió fue un aparato refractor interferencial: “con dos brazos P, Q de longitud, horizontales y perpendiculares entre sí. Los dos rayos luminosos, antes de interferir recorrían uno el brazo P y el otro el brazo Q, en las direcciones de ida y vuelta. El aparato en conjunto, comprendiendo el foco luminoso y los dispositivos para las observaciones, podía girar alrededor de un eje vertical; y entre todas las posiciones posibles durante el giro, tienen particular importancia dos: a saber, aquélla en que el brazo P o el Q coinciden lo mejor posible con la dirección del movimiento de la tierra” (García Bacca, ob. cit., pág. 61)

Fig. 17.- Esquema del interferómetro.

Desplazándose uno de los rayos luminosos en rozamiento con el *éter* estático, en el cual se desplaza la Tierra, según se suponía, debía producirse un corrimiento en el espectro, por no coincidir exactamente las ondulaciones de ambos rayos luminosos, puesto que

uno llegaría después que el otro; debiéndose probar por tal corrimiento al diferente tiempo empleado por uno de los rayos luminosos en el recorrido de igual distancia, diferencia debida al rozamiento del éter. Más ni el experimento de Michelson, ni el corregido Michelson Morley, dieron ningún corrimiento; de aquí derivó Michelson la idea del desplazamiento del éter junto con la Tierra en movimiento.

A esta interpretación opone Lorentz la suya.

Supongamos que una de las posiciones fundamentales es la del brazo P, orientado en dirección al movimiento de la Tierra. Sea P la velocidad del movimiento terrestre, y L siendo L el recorrido del rayo luminoso en su ida y vuelta.

Teóricamente el tiempo empleado por la luz en su recorrido del brazo P debió ser $L = \frac{P^2}{v}$, (longitud por el cociente de velocidad del movimiento entre velocidad de la luz al cuadrado), mayor que el tiempo empleado en el recorrido del brazo Q. Pero igual resultado se obtendría de suponer que la longitud del brazo P es $L = \frac{P^2}{v}$ mayor que la correspondiente a Q.

El experimento realizado no reveló ninguna diferencia de tiempo. ¿Cómo explicar esto? si suponemos que el brazo colocado en la dirección del movimiento terrestre es $L = \frac{P^2}{v}$ más corto que el otro, se habrá explicado el fenómeno salvándose a su vez el corrimiento previsto por la teoría de Fresnel.

Así, pues, será menester representarse que el movimiento de un cuerpo sólido opera un cambio en sus dimensiones, acortándolas en la dirección del movimiento.

El fracaso del experimento de Michelson, al no registrarse la variación esperada, permitió derivar que ni el movimiento ni el reposo tenían repercusión sobre la velocidad de la luz; esto es importante para la relatividad, de aquí a mostrar la constante de la velocidad de la luz sólo exigía su formulación matemática.

Este fenómeno que pudiera parecer extraño podría considerarse teniéndose en cuenta lo siguiente: la traslación puede operar cambios

a la altura de la composición molecular, se seguirá un cambio de dimensiones como el propuesto por la hipótesis por lo que respecta a la comprobación experimental de esta conducción, la reducción dimensional es ínfima y de difícil observación, así para el diámetro de la Tierra sería de 6,5 cms.

Partiendo de estos pensamientos iniciales desenvuelve Lorentz sus ideas sobre los fenómenos electromagnéticos, en un sistema en movimiento con velocidad menor a la de la luz; llegando a la siguiente conclusión: “el influjo de una traslación sobre un electrón único, o sobre un cuerpo pesado en conjunto se reduce en los aspectos de magnitud y figura, al cambio de dimensiones en la dirección del movimiento, haciendo estos K veces menores que en el estado en reposo” (García Bacca. ob. cit. pág. 66, cita de Lorentz).

La transformación de Lorentz la veremos, en forma facilitada, en el punto 3, (transformaciones de coordenadas y tiempos de un sistema en reposo a otro sistema que se halla en movimiento uniforme de traslación respecto del primero), de la relatividad restringida; lo trataremos allí por ser más útil que aquí.

Hasta aquí Lorentz se desenvuelve dentro de la física clásica, simplemente, lo hecho por él se reduce a buscar una causa que explique el fenómeno observado, lo cual encuentra en la “contracción” de la dimensión derivada del movimiento de los cuerpos. Tocaré a Einstein dar el paso decisivo.

b.- La Relatividad Restringida.-

El seguir considerando, tal como lo hacía la física clásica, la necesidad de presencias en reposo absoluto que sirvan de sistemas referenciales para la determinación de las leyes naturales, se muestra hoy a nosotros como **inútil** y desorientadora para una mayor aproximación y ajuste del conocimiento físico. Así el concepto de éter en reposo, en función del cual era considerado el movimiento de la Tierra; o la consideración de los fenómenos electromagnéticos, tomando ya el imán o el conductor en reposo. Siendo que estos fenómenos sólo son dependientes exclusivamente del movimiento relativo entre imán y conductor. Esto lleva a sospechar que el concepto de reposo absoluto no corresponde ninguna clase de propiedades ni mecánicas ni electromagnéticas.

Estos eran los puntos de partida de Einstein, los mismos que lo conducirán a renovar las concepciones físicas. Si no hay necesidad de elementos referenciales de carácter absoluto no habrá necesidad de un espacio y tiempo absolutos, tal cual los concebía Newton, sino que éstos pasarán a formar una intrincada e indisoluble relación espacio-temporal y no dos entidades separadas la una de la otra, el espacio y el tiempo pasarán a ser las coordenadas en las que se dan los fenómenos físicos, y más aún serán formas de la realidad misma, no simples telones donde se recortan sino elementos constitutivos de los mismos.

Por otro lado la velocidad de la luz entrará a desempeñar relevante papel dentro de los fenómenos físicos, teniendo el papel de velocidad límite y función métrica; la segunda en cuanto la relación y variaciones del continuo espacio-temporal, (variaciones en tanto alteraciones correlativas del espacio y del tiempo), tienen que sujetarse a la constante de la velocidad de la luz. Claro está que la velocidad de la luz perderá este privilegio métrico en la relatividad generalizada, pero es fundamental en la restringida.

Así pues, la física relativista restringida será levantada sobre las relaciones de cuerpos rígidos, relajes y velocidad de la luz; continuo espacio-temporal y velocidad de la luz como velocidad límite y función métrica.

Desenvolveremos la tesis einsteiniana ocupándonos de la parte cinemática por ser la que tiene importancia fundamental a nuestros fines.

1.- *Definición de la simultaneidad* .- Supongamos que se nos dé un sistema de coordenadas en que sean válidos los axiomas de la física mecánica-clásica **nortoniana***.

* Para nuestras necesidades, aquí, podemos precisar las axiomas de la mecánica newtoniana así: “a) Existencia de un sistema absoluto de referencia para la colocación local y temporal: existencia del espacio y tiempo absolutos; b) El reposo y el movimiento uniforme no poseen propiedades físicas; las leyes o fenómenos no se alteran por cambio de reposo o movimiento, pues, en rigor no se distinguen físicamente reposo y movimiento, c) La perfecta colocación en un lugar es posible independientemente de la perfecta colocación en el tiempo. Es decir

Para diferenciarlo del sistema que se introducirá posteriormente, llamaremos al supuesto “sistema en reposo”.

Un punto dado en tal sistema podrá ser determinado mediante unidades rígidas, sirviéndose a tal fin de la geometría euclídea, y expresando tal determinación en un sistema de coordenadas cartesianas, (en base a líneas y ángulos rectos).

La descripción del movimiento de un punto material exige la expresión de sus valores en función del tiempo. Pero tal expresión tendrá sentido, únicamente, si está claramente definido lo que entendemos por tiempo. Partamos de que toda referencia temporal es sobre “sucesos simultáneos”; así al decir “tal tren llega a las 7”, es como decir “el señalar la saeta de mi reloj las 7 y el llegar del tren son sucesos simultáneos”.

De lo dicho podría parecer que para deshacerse de las dificultades inherentes a la determinación del tiempo, bastase la sustitución de esta palabra por la de “saeta del reloj”; mas con ello sólo lo lograría una determinación local del tiempo, que no serviría para la determinación de los sucesos distantes.

Para salvar la evaluación del tiempo de sucesos distantes, cabe que observadores colocados en las coordenadas de los sucesos distantes vayan transmitiendo mediante señales luminosas el tiempo de los sucesos. Mas tal método sufrirá los efectos del lugar de donde

Espacio y tiempo son independientes entre sí y en sus condiciones ordenadoras. No se da algo así como “tiempo local”; d) Si reposo y movimiento uniforme no poseen propiedades físicas ni son en rigor nada físico, todo cuerpo dejado a sí mismo o bien permanece en reposo o bien en movimiento rectilíneo uniforme, y para ninguno de estos estados () se requiere de Inercia e) Intervendrá una fuerza cuando el movimiento no sea rectilíneo uniforme e inversamente, una fuerza se define por la alteración de la uniformidad de la velocidad, es decir por la aceleración.

“Ley Básica de la mecánica; fuerza es igual a la aceleración multiplicada por un factor conveniente (masa). Aquí comienza propiamente la física, ya que ni el reposo ni el movimiento uniforme poseen propiedades físicas” (García Bacca, ob. cit., págs. 88-9.)

se transmiten, por lo cual es necesario un proceder más expeditivo, por la coordinación siguiente.

Si en el punto A del espacio se sitúa un reloj, el observador colocado en A podrá dar la evaluación de los sucesos y su contorno, temporalmente por la coincidencia entre los sucesos y las saetas del reloj.

De igual manera si en B, punto del espacio, se halla otro reloj, —* un reloj de la misma estructura del que se halla en A,— es posible para el observador colocado en B determinar temporalmente los sucesos como en A. Mas aquí solamente tenemos un “tiempo A” y un tiempo B”, y no un tiempo común a A y B. Tendremos un tiempo común si ponemos por “definición” que el “tiempo” empleado por la luz para pasar de A a B es igual al “tiempo” que emplea para pasar de B a A.

Parte del punto A a B un rayo de luz en el momento t_a , medido según el “tiempo A”, llegando a B en el momento t_b del “tiempo”; regrese reflejado de nuevo hacia A, llegando en el momento t'_a del “tiempo A”; los dos relojes serán sincrónicos si cumplen la ecuación:

$$t_b - t_a = t'_a - t_b$$

Supondremos que tal definición temporal está libre de contradicciones gracias a su construcción por definición, siendo válidas las siguientes relaciones:

1.- Si el reloj de B va sincrónico con el de A, el de A lo está también con el de B.

* En estas consideraciones Einstein trata del tiempo como entidad precisable puntualmente, reducido a “suceso presente y su contorno”; hasta aquí está dentro de la concepción clásica, más la imposibilidad de esta determinación local para valer para sucesos alojados lo aparta radicalmente de aquella concepción. La física clásica suponía que la precisión de un tiempo infinitamente pequeño, era valedera para cualquier otro suceso análogo por más distante que se diera, y esto por debe carácter absoluto al tiempo; pero en las ideas desenvueltas por Einstein el tiempo determinado adquiere un carácter de tiempo-local, concepto germinado en Lorentz; y aquí su apartamiento de lo clásico en física.

2.- Si el reloj de A está sincronizado con el de B y con el de U, lo están también entre sí los de B y U.

Así mediante experimentos físicos (conceptuales) se ha llegado a determinar que debe entenderse por relojes de marcha sincrónica, colocados en lugares diversos y en reposo en tales lugares, y por tanto obtenido una definición de “simultaneidad” y de “tiempo”.

“El tiempo” de un suceso es la indicación concreta de la simultaneidad entre tal suceso y un reloj en reposo colocado en el lugar mismo del suceso, con tal que el tal reloj esté sincronizado con un reloj determinado, en reposo, siempre el mismo para todas las determinaciones temporales” (García Bacca, ob. cit. pág. 76.)

Se ha fijado, pues, el tiempo con una simultaneidad o **coinstancia**; **coinstancia** infinitesimal para un punto del universo, en el cual se puede establecer un tiempo finito para todo el mundo. Nótese que aquí aún el tiempo tiene cierto carácter independiente, cierta autonomía, (claro que unido al espacio, en el intervalo o dimensión espacio-temporal). Cierta privilegio como medida de los fenómenos físicos; en la relatividad generalizada perderá este carácter, deviniendo simple manifestación de algo más profundo, la gravitación.

Experimentalmente se llega a determinar la constante de la velocidad de la luz $V = \frac{\overline{AB}}{t'a = ta}$; en donde V, es velocidad de la

luz, $\overline{AB}$ la distancia recorrida por el rayo luminoso y t'a-ta el tiempo empleado, en esta constante y cualquiera mutación del tiempo determina más concomitante del espacio y viceversa de tal manera que siempre se da la constante de la velocidad de la luz; aquí se puede apreciar, lo ya dicho, la función métrica normadora de la luz en la teoría de Einstein.

De esta manera queda fijado el tiempo mediante relojes en reposo, y por tanto el “tiempo del sistema en reposo”.

2.- Sobre la relatividad de longitudes y tiempos.-

Las consideraciones a desarrollar tienen como fundamento el principio de la relatividad y de la constancia de la velocidad de la luz, los que quedan precisados así:

a.- Las leyes que rigen los diversos estados de los sistemas físicos son independientes de la referencia y dos sistemas de coordenadas que están animadas, uno respecto del otro, de movimiento uniforme de traslación.

b. Todo rayo de luz se mueve en el sistema de coordenadas en reposo con una velocidad determinada V . Independientemente de que tal rayo son emitidos por un cuerpo en reposo o en movimiento según esto:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{camino de la luz}}{\text{duración temporal}}$$

definiéndose “duración temporal” como quedó definido en 1.

Supongamos una barra rígida en reposo, medida con un patrón también en reposo, que tenga una longitud 1.

Imaginemos que el eje de la barra está colocado en la dirección del eje de las X , en un sistema coordenadas en reposo, y que se le proporcione un movimiento uniforme de traslación, de velocidad V , movimiento paralelo al eje de las X en el sentido de los valores crecientes de X ; figura 18.

Si queremos saber la longitud de la barra, su valor lo obtendremos por las siguientes operaciones:

A.- El Observador tomando el patrón de medida, mide la longitud por aplicación directa de la unidad de medida, como si estuvieran en reposo el observador, la barra a medir y el patrón.

B.- El observador determina, mediante relojes en reposo, colocados en el sistema en reposo, sincronizados según lo dicho en 1.- los puntos del sistema en reposo con los cuales coinciden el principio y el fin de la barra a medir. La longitud de ambos puntos medida con la unidad de medida preestablecida, y ahora en reposo, puede también designarse como “longitud de la barra”. Según la relatividad la longitud obtenida en a, —longitud de la barra en un sistema en movimiento—, debe ser igual a la longitud de la barra en reposo. En tanto que la longitud resultante de b, —longitud de la barra en movimiento en un sistema en reposo—, la determinamos según los principios ya fijados, encontrando que es distinta de 1.

Para la cinemática usual las longitudes obtenidas en ambas operaciones son iguales; o, en otros términos, que un cuerpo rígido en movimiento en un tiempo t es perfectamente sustituible, geoméricamente hablando, por el “mismo” cuerpo rígido de un sistema en reposo su posición determinada, según la física clásica, pues, valdrá (V fig. 18): $L = L' = L''$; en tanto que para la física relativista, $L = L'$, más no $L' = L''$ o $L = L''$.

Supongamos, ahora, que en los extremos A, B de la barra se encuentran dos relojes sincronizados con los del sistema en reposo, esto es que los “tiempos” que marquen correspondan a los “tiempos” esto es que los “tiempos” que marquen correspondan a los “tiempos” del sistema en “reposo” en cualquier lugar que se den, supongamos, finalmente, que junto a cada reloj haya un observador sujeto, por tanto, el movimiento que efectúa el reloj en marcha; y que los relojes hayan sido sincronizados según lo establecido en 1.

Del punto A parte en el momento t_a un rayo luminoso, en el momento t_b será reflejado en el punto B, el cual es su meta, llegando de regreso a A en el momento t'_a .

Teniendo en cuenta la constante de 1. velocidad de la luz, tendremos:

$$t_b - t_a = \frac{ra.b}{V - v} \text{ y } t'_a - t_b = \frac{ru.b}{V + v}$$

Donde $ra.b$ significa la longitud de la barra en movimiento, medida en un sistema en reposo; V , la velocidad de la luz; v , la velocidad del cuerpo. La razón de que en una fórmula se reste la velocidad del cuerpo, en tanto que en otro se suma, se debe a que los datos son tomados unos en relación a un sistema en reposo, y otros con un sistema de movimiento. Dando como resultado valores diferentes.

Los observadores que participan del movimiento de la barra dirán que los tiempos no son sincronizados, en tanto que los del sistema en reposo dirán que sí lo son. Así, pues, no es posible dar significación absoluta al concepto de simultaneidad “sin que dos sucesos que, respecto a un sistema, de coordenadas, son simultáneos, considerados desde un sistema en movimiento respecto del sistema,

antedicho, ya no podrán considerarse como simultáneos” (García Bacca, ob. cit. pág. 78).

La simultaneidad no es, por tanto, en forma alguna una determinación absoluta, sino que esta vinculada al lugar concreto donde se da, al sistema de coordenadas donde se desenvuelve; las mismas palabras son aplicables al espacio. Tanto espacio y tiempo son dos conceptos íntimamente vinculados y realmente inseparables, conforman un continuo espacio-temporal, una unidad indisoluble, el “punto cósmico” (Welpunkt) de Minkowsky; y la distinción susceptible de efectuar entre ambos no es sino *conceptual*, falló pues la física clásica al darle a esta separación conceptual una realidad física que no tenía.

3.- *Transformaciones de coordenadas y tiempos de un sistema en reposo a otro sistema que se halla en movimiento uniforme de traslación respecto del primero.*- Vista la relatividad de tiempo y espacio dados en el continuo espacio-temporal, punto fundamental es la transformación de las coordenadas espacio-temporales de un sistema en movimiento uniforme de traslación a las coordenadas de un sistema en reposo; esto implica la equivalencia de las coordenadas de ambos sistemas y el mantenimiento de las leyes físicas a través de las diferentes y lógicas coordenadas espacio-temporales.

Considerando lo fundamental de este punto y para mayor claridad y precisión, transcribimos el apéndice “Deducción sencilla de la transformación de Lorentz” que Einstein pone a su libro “La Teoría de la relatividad al alcance de todos”; nótese que se trata de la transformación de Lorentz, porque precisamente la teoría de la relatividad espacial establece que, “las leyes naturales generales son covariantes respecto a la transformación de Lorentz”

Sigamos a Einstein:

“Con la orientación relativa de los ejes indicada en la figura (V. fig. 19), los ejes X de ambos sistemas coinciden siempre. Podemos resolver el problema considerando primero hechos que se verifican a lo largo del eje de las X. Un fenómeno de esta especie

está

Figura 19

caracterizado respecto del sistema **K** por la abscisa x y el tiempo t , y respecto al sistema **K'** por x' y t' , **D**ados x y t , se trata de encontrar x' y t' .

“Una señal luminosa que se propaga a lo largo del eje Ox , lo hace según la ecuación

$$X = ct, \quad \text{o} \quad X - ct = 0 \quad (1)$$

“Como la misma señal debe propagarse respecto a **K'** con la misma velocidad, será

$$X' - ct' = 0 \quad (2)$$

Todo punto espacio-tiempo (fenómeno) que satisfaga la ecuación (1), debe satisfacer a la (2), lo cual sucede, evidentemente, si existe una relación de la forma:

$$X' - ct' = (x - ct) \quad (3)$$

“en la **que representa** una constante, pues según la ecuación (3), la anulación de $x - cv$ lleva consigo la de $x' - ct'$.

“El mismo razonamiento aplicado a un rayo de luz que se propaga sobre el eje Ox , en el sentido negativo de ésta, de la condición

$$X' + ct' = (x + ct) \quad (4)$$

“Sumando y restando las ecuaciones (3) y (4) y poniendo para

mayor comodidad, en lugar de las constantes a , b , y:

$$a = \frac{1}{2},$$

$$b = \frac{1}{2}$$

“se obtiene

$$X' = ex - bct$$

$$et' = act - bx \quad (5)$$

Nuestro problema quedaría, pues resuelto si conociésemos los valores de a y b ; éstos se obtienen por las siguientes consideraciones:

“Para el punto origen de K' es constante $x' = 0$, luego, según la primera de las ecuaciones (5), será:

$$x = \frac{bc}{a}t.$$

“Designando por V la velocidad con que el origen de X' se mueve con relación a K , será pues:

$$V = \frac{bc}{a} \quad (6)$$

“El mismo valor v se deduce de las ecuaciones (5) cuando se calcula la velocidad de otro punto de X' respecto de K ; la velocidad (dirigida en el sentido de las x negativas) de un punto X respecto de K' . Se puede consiguiente, decir brevemente que v es la velocidad relativa de ambos sistemas.

“Además, según el principio de relatividad, es claro que la longitud respecto de K de una escala unidad en reposo respecto a K' , debe ser exactamente la misma que la longitud respecto a K' de una escala unidad en reposo respecto a K . Para saber cómo se ven los puntos del eje X' desde K , necesitamos tomar una “instantánea” de K' desde K ; lo cual quiere decir que tomamos para t (tiempo de K), un valor determinado, por ejemplo, $t = 0$. Para este valor se deduce de la primera de las ecuaciones (5): $x' = \frac{a}{b} + x$.

“Dos puntos del eje x' que, según la medición hecha en K' , distan entre sí $x' = 1$ están pues, en nuestra fotografía a la distancia.

$$x = \frac{1}{a} \quad (7)$$

Pero si hacemos la fotografía desde K' ($t' = 0$), se deduce que las ecuaciones (5) por eliminación de t' teniendo en cuenta l. (6)

$$x' = a(1 - \frac{v^2}{c^2})x$$

“Resulta, por consiguiente, que dos puntos del eje x, a distancia 1 (respecto a x), en nuestra fotografía, distan entre sí.

$$x' = a(1 - \frac{v^2}{c^2}) \quad (7a)$$

“Ahora bien, según lo dicho, las dos instantáneas deben de ser iguales, luego el valor de x dado por (7) y el x' dado por (7a) también han de ser iguales, y, por tanto:

$$a^2 = - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7b)$$

“Las ecuaciones (6) y (7b) determinan las constantes a y b. Substituyendo sus valores en (5), se obtienen las ecuaciones:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

“Esta es la transformación de Lorentz para fenómenos sobre el eje de las x , la cual satisface a la condición

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad (8a)$$

“La generalización de este resultado a fenómenos que se realizan fuera del eje x , se obtiene añadiendo a las ecuaciones (8) las condiciones

$$y' = y$$

$$z' = z$$

“Con esto queda satisfecho el postulado de constancia de velocidad de la luz en el vacío para rayos de cualquier dirección, tanto para el sistema K como para el K' , como se reconoce del siguiente modo:

“Hagamos partir, en el tiempo $t = 0$, una señal del origen de K ; su **propagación** se verifica por la ecuación

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = ct$$

“O bien, elevando al cuadrado,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (10)$$

“La ley de propagación de la luz, junto con el postulado de la relatividad, exigen que la propagación de dicha señal (vista desde K'), se verifique con arreglo a ley correspondiente:

$$v' = c' t'$$

“o bien,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (10a)$$

“Para que (10a) sea consecuencia de (10), es preciso que sea:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) ;$$

Pero, como para puntos del eje x deben valer las (8a) es preciso que $\gamma = 1$. Se ve fácilmente que la transformación de Lorentz satisface a la Ecuación (11), tomando $\gamma = 1$; y, en efecto, la (11) es una consecuencia de (8a) y (9), luego también de (8) y (9).

“La transformación de Lorentz, representada por las ecuaciones (8) y (9), necesita aún ser generalizada. Evidentemente no es esencial que los ejes de K', se tomen paralelos en K, ni que la velocidad de traslación de K' respecto de K tenga la dirección del eje de x. Un razonamiento sencillo hace ver que la transformación de Lorentz, considerada en general, puede obtenerse como producto de dos transformaciones, a saber: una transformación de Lorentz en el caso particular estudiado y una transformación puramente **espacial**, que corresponde a la sustitución del sistema de coordenadas rectangulares por otro de ejes no paralelos a los primeros.

“Matemáticamente, la transformación de Lorentz puede caracterizarse así:

“Expresa x', y', z', t' , por funciones lineales de x, y, z, t, tales que se verifique idénticamente la relación:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11a)$$

“es decir que sustituyendo en el primer miembro x', y', z', t' por sus valores en función de x, y, z, t, se obtenga una identidad” (A.-Einstein, ob. cit. págs. 111 a 117; Edit. Aldo, Buenos Aires, 1946).

A continuación en su Memoria sobre la relatividad restringida, Einstein analiza la electrodinámica, la naturaleza física del campo gravitatorio, la gravedad de la energía, tiempo y velocidad de la luz

en un campo gravitatorio y la curvatura de los rayos luminosos en un campo gravitatorio; temas todos ellos de gran importancia, pero no necesarios e indispensables para nuestros objetivos, la consideración del espacio en la física actual. Bástenos para concluir, decir que las variaciones que experimentan el espacio y el tiempo por efectos de la velocidad son, en el caso del espacio el acortamiento de la dimensión en la relación:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{V^2}}$$

Y por tanto mayor cuanto mayor es V ; para $V = V$, “todos los objetos en movimiento, desde el punto de vista del sistema en reposo, se convierten en figuras planas. Esto es, pues, el acortamiento que sufren los cuerpos rígidos debido a la velocidad del sistema en que se hallan.

En el caso del tiempo, el retraso que experimentan los relojes por efecto de la velocidad es:

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{V^2}} \text{ de segundo}$$

Claro que estas consecuencias previstas para barras y relojes no son *dos*, sino *una*, proyectados en dos aspectos conceptuales distintos, pero no realmente”

Concluyendo, ¿qué nos dice la Física relativista restringida respecto del espacio?. La concepción Einsteniana en la forma restringida recalco, una vez más, la necesidad que tiene la física de elaborar conceptos ajustados a los fenómenos estudiados, la ciencia física elabora conceptos para estudiar la naturaleza y tienen que ajustarse aquéllos a los hechos reales cuya expresión pretenden ser. Pues bien, la física clásica elaboró y sostuvo los conceptos de espacio y tiempo como dos absolutos, y como tales residentes en ellos mismos con absoluta independencia frente a las cosas y entre sí; más tal forma de considerarlos ya no se avenía con los nuevos desenvolvimientos de la física, fue por tanto menester una

reconsideración de **estos** planteamientos, surgiendo el concepto “intervalo” el cual no era como en la concepción clásica un intervalo temporal o un intervalo espacial aislados, sino un “intervalo espacio-temporal”. Una nueva entidad conceptual en la cual se dan indisolublemente unidos espacio y tiempo, y este nuevo concepto permitía una más certera profundización del mundo físico, prueba **esta** de su mayor cercanía y ajustamiento a lo que mundo físico es.*

Relacionado con lo dicho surge la relatividad de las dimensiones espaciales y de las duraciones temporales, esto es de las longitudes y de los lapsos, una longitud x y una duración t no es una y la misma en todas partes, sino que las mismas varían, se acortan o alargan según el ambiente móvil que las manifiesta. Más tal relatividad no genera un total caos, imposibilitando el establecimiento de leyes naturales y la equivalencia de sistemas coordinados diferentes, sino que cualesquiera que sean las modificaciones que sufren espacio y tiempo, estas se dan de tal manera que la ecuación que expresa su peculiar estructuración en el intervalo espacio-tiempo será igual siempre a la constante de la velocidad de la luz.

Estas consideraciones sobre el espacio y su forma de concebirla nos muestra, claramente, cuán alejados nos hallamos de la tesis Kantiana.

c.- El aporte de Minkowsky.-

Antes de considerar la física relativista generalizada trataremos del aporte de Minkowsky. En su memoria Espacio y tiempo, Minkowsky demostró “la plena coherencia geométrica y algebraica de la relatividad restringida”.

Iniciando su memoria afirma que la consideración de Espacio y tiempo como entidades independientes ha llegado a su fin, pues ya no es posible considerarlos independientemente; nadie ha precisado

* Precisamente el conocimiento físico consiste en reducir unos conceptos a otros por determinaciones conceptuales, sino en coordinar conceptos con cosas reales” y “se presentan definiciones de coordinación, sobre todo cuando se trata de realizar mediciones” (Comentario de H. Reichenbach “sobre las de

un tiempo, éste, ése o aquél que no se dé en tal o cual lugar, lo mismo nadie ha delimitado un espacio que no se presente en un tiempo. Es necesario, por tanto, considerar ya no tiempos y espacios aislados sino un punto del espacio en un punto del tiempo, esto es considerar un “punto cósmico (Weltpunkt), representable con un sistema de valores x, y, z, t . “El conjunto de todos los sistemas de valores x, y, z, t se llamará “mundo”.

Partiendo de estas consideraciones Minkovsky busca y consigue darnos la representación geométrica y el análisis algebraico de esta nueva concepción de espacio-tiempo; el último nos dará para el “intervalo” la Ecuación.



en la cual dx_1 representa el tiempo clásico, y las demás variables al espacio. La representación geométrica será la hipérbole en tratándose de dos dimensiones.

Las ideas de Minkovsky en su memoria sobre la relatividad se reduce a lo siguiente: “Si (1) define una métrica, sólo que referida al espacio exclusivamente la fórmula (2) definirá una métrica igualmente”; desde el punto de vista geométrico y algebraico puro, no hay motivo alguno para preferir la una a la otra; por tanto la relatividad tiene perfecto derecho técnico para elegir (2)*, la que más conviene a sus fines, consideración espacio-temporal, que por muy extraños que aparezcan las consecuencias desde el punto de vista de la métrica” (García Bacca, ob. cit. pág. 134).

Así pues, la física clásica está representada geoméricamente por la circunferencia y la relativista por la hipérbole; si fuera en tres dimensiones sus representaciones serían superficies esféricas y de hiperboloides de dos cascos respectivamente.

* Las fórmulas (1) y (2) se refieren a la ecuación con tres y cuatro coordenadas respectivamente”.

- Fig. 20.- a.- representación métrica definida de la física clásica.
b.- Representación métrica indefinida de la física relativista.

La hipérbola está compuesta de dos ramas independientes y separadas en plano, además por dos rectas en cruz llamadas asíntotas o tangentes al finito. Esta representación coordina y expresa certeramente las relaciones de la física einsteniana.

Así:

- La ecuación de las asíntotas corresponde a la ecuación de la propagación de la luz:
- Las regiones I y II incluyen los fenómenos y leyes “temporaloides, esto es, aquellos que se dan en velocidades inferiores a la de la luz; y las regiones III y IV incluyen los fenómenos que, en caso de unir entre sí y darse, lo harían con velocidades superiores a la de a luz, esto es el dominio “especialoide”.

Fig. 21.- Representación del espacio-tiempo de Minkowsky.

Como se aprecia de la figura 21 aquí está representados los

dominios de lo espacial y de lo temporal y la velocidad de la luz.

Las asíntotas representan la velocidad de la luz; siendo las líneas tendientes al infinito representan magníficamente la función límite de la velocidad de la luz, y siendo velocidad límite es representada por

0, así su fórmula será dz^2 a 0.

Los dominios I y II son los dominios de los fenómenos físicos, en esta dimensión “temporaloides” se nos presentan los fenómenos a

cuya velocidad es menor a la de la luz (dz^2 0): en él se dan temporalmente ordenados los fenómenos y su cadena causal.

En los dominios III y IV tenemos lo “espacialoides”, linderos donde la velocidad de la luz es sobrepasada, y cuya fórmula será

dz^2 0, en él no cabe un encadenamiento causal y nos hallamos con una temporalidad indeterminada.

Teniendo la velocidad de la luz una función métrica, en la relatividad restringida, todo aquello que transpone sus linderos se tornará para nosotros algo sin sentido, puesto que lo único que lo unía a nuestro conocimiento, a nuestro conocimiento ha sido roto y no nos será posible conocerlo. Únicamente aquello que está por debajo de la velocidad de la luz que dentro de la esfera de nuestro conocimiento, y es lo único que podemos determinar causalmente; sólo estos hechos son y conforman el dominio de los fenómenos naturales, el demonio de la realidad.

Así tenemos que si bien el espacio conforma toda la figura de la hipérbola, solo la parte del espacio que cae dentro del dominio “temporaloides” cobra realidad auténtica. Esta, pues es una ajustada representación de la unidad inextricable del espacio-tiempo; el esquema representativo de Minkowsky junto, así, en unidad indisoluble espacio, tiempo y velocidad de la luz, representándole certeramente en la hipérbola que no puede dejar de tener dos ramas independientes y sus asíntotas so pena de ser la tal figura.

El gran aporte de Minkowsky, radica, como qued6 dicho, en haber logrado la fundamentación matemática de la teoría relativista, dándole así un sólido punto de apoyo para su desenvolvimiento.

d.- La relatividad generalizada.-

Los desenvolvimientos de la relatividad restringida no obstante sus revolucionarios planteamientos, se encuentran aún dentro de la línea general de Galileo y Newton, en cuanto postula: “Si se escoge un sistema de coordenadas K , tal que respecto del mismo las leyes físicas tengan la formulación más sencilla, valdrán también las “mismas” leyes aún respecto de cualquier otro sistema de coordenadas K' que se encuentre relativamente a K en un movimiento de traslación uniforme”. Esta postulación es restringida en tanto sólo se refiere al mantenimiento de las “mismas leyes” al ser extensivas a sistemas únicamente animados de “un movimiento uniforme de traslación”; sin extenderse la tal equivalencia a casos de movimientos “no uniformes” de los sistemas K y K' .

Lo diferencial entre la física clásica y la relativista restringida, reside únicamente en que ésta postula la constancia de la velocidad de la luz, de la cual se deriva, considerando el principio de la relatividad anotado, la velocidad de la simultaneidad, la transformación de Lorentz y el comportamiento de los cuerpos rígidos y de los reflejos en movimiento.

No obstante el radical cambio de la relatividad restringida introduce en la concepción del espacio y el tiempo, sigue considerando sin mayores y más profundas investigaciones, que los teoremas geométricos han de ser tenidos como posibles posiciones relativas de los cuerpos rígidos, en reposo, así como los teoremas de la cinemática han de describir, en cuanto teoremas, el comportamiento de los cuerpos de medida y los relojes.

Lo último dicho implica que a dos puntos de un cuerpo rígido en reposo habrá de corresponder siempre una longitud determinada, independientemente del lugar, orientación del cuerpo y tiempo. Lo mismo que a dos situaciones de las agujas del reloj habrá de corresponder un segmento de tiempo preciso, independiente, también del lugar y tiempo en que se dan.

La relatividad restringida si bien establece una nueva relación indisoluble espacio-temporal, deja a ésta una realidad última independiente, espacio- tiempo forman un sistema referencial para los fenómenos, y más aún hasta un espacio y tiempo propios no deductibles a otras instancias. Pues bien, la relatividad generalizada

en su avance quitará estos caracteres al espacio-tiempo para transferirlos a situaciones más profundas como la gravitación; deviniendo así el espacio-tiempo a mera manifestación de instancias dadas por la materia.

Así también, esta nueva relatividad establecerá la posibilidad de la transformación o equivalencia cualquiera que sea el movimiento que anime al sistema de coordenadas.

1.- *Sobre los fundamentos que conducen a una ampliación del postulado de la relatividad.*- La Mecánica Clásica así como el principio de la relatividad restringida adolece de un defecto teórico, señalado primeramente por Mach.

Veámoslo ejemplificado:

Los cuerpos líquidos de igual magnitud y constitución, están libremente suspendidos en el vacío y a una distancia mutua (y de todas las demás masas), no entrando en consideración más que las fuerzas gravitacionales que las partes del mismo cuerpo ejercen entre sí, se excluyen movimientos relativos a partes de tales cuerpos. Supóngase luego, que con unidades de medida, —en reposo—, se miden las superficies de los dos cuerpos (S_1, S_2); resultando la superficie S_1 ser una esfera, en tanto que la S_2 una elipsoide.

¿Cuál es el fundamento de la diferenciación de los dos cuerpos? La respuesta a darse será satisfactoria para el pensamiento físico si resulta experimental observable; por cuanto la causalidad física no es tal sino en tanto causas y efectos son hechos comprobables.

A la interrogante, la mecánica la mecánica clásica sólo responde: las leyes de la mecánica valen para un espacio R_1 Respecto del cual S_1 , está en reposo; pero no valen respecto de R_2 , respecto del cual el cuerpo S_2 , está en reposo. Tenemos por tanto, introducido un espacio Absoluto R_1 , y sólo sobre él predica la mecánica clásica, resultando ser ésta una “causa ficticia”, ya que no acierta a explicarnos los resultados distintos.

Respuesta satisfactoria serán: El Sistema integrado por S_1 y

S_2 no incluye él solo una causa asignable de las diferencias constatadas entre S_1 y S_2 . Por tanto la causa tiene que estar “fuera” del sistema. Así se llega a presuponer que las leyes que determinan las figuras distintas S_1 y S_2 , habrán de permitir explicar el comportamiento de S_1 y S_2 , por el influjo lejano de las masas, que no se habían hecho intervenir en el sistema de cuerpos considerados. Esas masas que entran en consideración deben ser suficientes y observables como causas de S_1 y S_2 . Como vemos se desecha la posibilidad de aceptar otro espacio R_2 , por cuanto subsistiría el problema, y se va en busca en causas más profundas, las masas; el espacio pierde, pues, su privilegio de sistema referencial. Y no habiendo ya ningún sistema referencial se da la exigencia de que: “Las Leyes de la Física han de estar hechos de tal manera que valgan respecto de cualquier sistema en movimiento.

Además de esta consideración teórica hay un hecho, bastante conocido, que abona por la ampliación de la relatividad:

Son K un sistema referencial galileano, éste es un sistema respecto del cual una masa, suficientemente alejada de las demás, se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme. Son, además K' un sistema de coordenadas que se mueve con relación a K en movimiento uniformemente acelerado, una masa suficientemente alejada de las demás estaría animada, respecto a K' , de un movimiento acelerado tal “que la aceleración y dirección de la misma serían independientemente tanto de su composición material como de su estado”.

¿Es posible que un observador situado en reposo en el sistema K' saque la conclusión de que se halla en un sistema “verdaderamente” acelerado? No se podrá concluir tal cosa, pues poco se sabe de las masas libres en movimiento respecto de K' ; más se puede interpretar así: el sistema K' no está en movimiento acelerado, pero en el dominio espacio-temporal considerado se da un campo gravitatorio, causante éste del movimiento acelerado que experimenta los cuerpos en el sistema K' . La interpretación dada es posible por cuanto la experiencia nos presenta un campo gravitatorio

con la facultad de comunicar movimiento acelerado a los cuerpos.

De esta manera, presentadas las cosas con referencia a K' como lo estaban en la mecánica clásica para los sistemas referenciales en reposo; siendo posible considerar a K' como un reposo, no hay ninguna razón para preferir K frente a K' : por tanto la naturaleza sugiere que se tome **indistintamente** K o K' , considerándolos a ambos con iguales derechos para ser tenidos como “en reposo”, o en otros términos para servir de sistema referencial de las leyes naturales.

De aquí la necesidad para la teoría general de la relatividad de desarrollar una teoría de la gravitación.

2.- *El continuo espacio-temporal. Postulado de covariencia general para las ecuaciones que expresan las leyes generales de la naturaleza.*- Tanto en la mecánica clásica como en la relatividad restringida, las coordenadas de espacio y tiempo tienen significación física inmediata.

Considerar un punto o suceso puntual que tiene como coordenada X_1 medida en el eje de las X_1 , significa que se puede obtener su proyección según reglas de geometría euclidiana mediante patrones rígidos de medida, si se explica el patrón medido X_1 veces sobre el eje positivo de las X_1 y empezado por el punto cero de las coordenadas del cuerpo.

El que un punto tenga la coordenada X_1 medida en el eje de las X_1 , $X_4 = t$, implica un reloj-unidad en reposo en el sistema de coordenadas que se considera, reloj que tiene una marcha bien determinada, la misma que coincide con el principio del suceso, el mismo que al terminar ha cumplido $X_4 = t$ periodos.

Tal concepción tenía el físico clásico sobre el espacio y el tiempo; pero para cumplir el principio generalizado de la relatividad es menester abandonar tal concepción, más con la condición que las nuevas consideraciones sean válidas para la teoría espacial de la relatividad en ausencia de campos gravitatorios.

Sigamos la exposición de Einstein:

Introduzcamos en un espacio libre de campos gravitatorios, un

sistema de referencia galileano $K(x, y, z, t)$, y además otros sistemas $K'(x', y', z', t')$ en rotación uniforme respecto de aquél. Supondremos que tanto el origen de los dos sistemas como el eje de las Z coinciden constantemente.

Fig. 22.- Sistema K y K' conjunto de origen y eje Z comunes; el eje perpendicular al plano del papel hace de eje de rotación.

Queremos mostrar que los criterios e interpretación anteriormente dados a las medidas **espaciales** y temporales no pueden subsistir en un sistema como K' .

“Parece claro por motivos de simetría, que un círculo con centro en el origen del plano K , Y del sistema K se conservará tal respecto del plano A' , Y' del sistema K' . Imaginemos ahora que medimos la periferia y el diámetro de tal círculo con una unidad de medida (infinitamente pequeño con respecto a la magnitud del radio), y hacemos el cociente de ambas mediciones. Si se realizase el mismo experimento con un patrón de medida en respecto de un sistema de coordenadas galileano K , el cociente daría ni más ni menos **que** . **Pero** el resultado de una medición hecha con un patrón en reposo del sistema K' , será un número mayor **que** . **Es** fácil persuadirse de ello si se mira todo el proceso de medición desde el sistema en reposo K , y se recuerda que el patrón de medida aplicado a la periferia experimenta una contracción de Lorentz, pero no la sufre el patrón de medida aplicado en la dirección del radio. Así que respecto del sistema K' no vale la geometría de Euclides, por tanto, el concepto de coordenadas anteriormente explicado, que suponía la validez de dicha geometría, fracasó en casos como los del sistema K' . Por el

mismo motivo, resulta imposible señalar para el sistema K' una noción del tiempo acomodada a las necesidades de la física y que permitiese servirse de relojes en reposo respecto de K' y de la misma construcción.

“Para demostrar este segundo punto, supóngase que se hallan en el centro u origen de las coordenadas y en la periferia, dos relojes de la misma estructura y que vamos a considerar su marcha desde el punto de vista del sistema “en reposo” K .

“Según el conocido resultado de la teoría espacial de la relatividad, el reloj colocado en la periferia, va, desde el punto de vista de K , más despacio que el colocado en el origen de las coordenadas, porque el primero se halla en movimiento, y el segundo no. Si se diera un observador que, colocado también en el origen de las coordenadas, pudiese ver, por medio de dispositivos luminosos, la marcha del reloj que marcha en la periferia, notaría que tal reloj va más despacio que el que tiene junto a sí en el origen de las coordenadas. Y como no se resignaría a suponer que la velocidad de luz depende explícitamente del tiempo durante el camino recorrido por ella, no tendría más remedio que adoptar la interpretación dicha, a saber, que el reloj situado en la periferia va “realmente” más despacio que el **que** tiene junto a sí en el orden de las coordenadas. Por tanto, tendrá que admitir una definición tal de tiempo que haga depender la marcha rítmica del reloj del lugar en que se halla.

“Llegamos de consiguiente a la conclusión en la teoría general de la relatividad no se puede definir las magnitudes espaciales y temporales de tal modo que las distancias espaciales de las coordenadas pueden ser medidas sin más, por una unidad de medida **especial**, y las temporales con un reloj norma.

“Fracasan, por tanto, los medios empleados hasta el presente para introducir y fijar en el continuo espacio-temporal sistemas de determinación de coordenadas y, por tanto, no parece que se puede hallar camino alguno que permita ajustar al mundo cuadrimensional un sistema de coordenadas tal que con él se obtenga una formulación la más sencilla de las leyes de la naturaleza.

“Así no nos queda otro remedio que tomar como igualmente aceptables y permitidos, para la descripción de los fenómenos

naturales, todos los sistemas imaginables de coordenadas. O dicho bajo la forma de postulado:

“Las leyes generales de la naturaleza han de ser expresadas por ecuaciones que valgan para todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean covariantes (universalmente covariantes) respecto de cualquiera tipos de substituciones” (García Bacca, ob. cit. págs. 153-155).

Esta covariencia general que despoja al espacio y al tiempo de los privilegios referenciales que tenían es una exigencia natural. Para ver esto basta recalcar que todas nuestras constataciones espacio-temporales no son más que constataciones de coincidencias espacio-temporales; así la medición de una longitud X no es más que la coincidencia de sus puntos con los del patrón de medida que usamos; así se trata de determinar el tiempo de un suceso, lo mismo, su medición consistirá en hacer coincidir su principio y fin con las indicaciones del reloj-patrón utilizado.

Ceñirse a un sistema de coordenadas no persigue, por tanto, más que proporcionar una descripción más sencilla de las coincidencias. Para tal fin se coordina con los fenómenos reales un sistema de variables espacio-temporales x_1, x_2, x_3, x_4 , tal que a cada punto del Universo corresponda un sistema de valores $x_1, \dots, x_4$; “quedando definida la coincidencia por la concordancia de los valores de las coordenadas correspondientes”.

En lugar del sistema x_1, x_2, x_3, x_4 es posible introducir, también, un sistema de funciones de aquél, esto es nuevas coordenadas x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , la igualdad de estas cuatro nuevas coordenadas será a su vez un nuevo sistema o criterio de coincidencia espacio-temporal para los sucesos puntuales.

En conclusión, reduciéndose toda la experiencia física a tales coincidencias no hay alguna para preferir un sistema referencial a otro; llegamos, de esta manera, al postulado de la covariancia general.

A continuación **Einstein** entra a considerar la relación de las cuatro dimensiones espacio-temporales y la expresión del campo gravitatorio, la técnica matemática para establecer la covariancia

general, (consideraciones obra el cálculo **tensorial**, este cálculo o diferencial absoluto formula las leyes físicas de modo que resulten invariantes inclusive frente a cambios de sistema de “conceptos” o “tipos” de **medida**”); pasando luego a la teoría del campo gravitatorio y otras situaciones. De todo esto lo que más nos interesa es lo referente a las dimensiones espacio-temporales y la gravitación; sin entrar a un desenvolvimiento de esta parte, dadas las dificultades inherentes al instrumental matemático que utiliza, nos limitaremos a la siguiente consideración de Einstein al respecto: “Según la teoría general de la relatividad, la gravitación juega un papel excepcional frente a las demás fuerzas, especialmente frente a las electromagnéticas, consistente en que las funciones que describen el campo gravitatorio” determinan simultáneamente las propiedades métricas del espacio cuadrimensional medible” (García Bacca ob. cit. pág. 158).

¿Qué es lo que la relatividad generalizada aporta a la consideración del espacio? Sobre lo ya dicho en la relatividad restringida tenemos: Para establecer la covariancia universal, que haga valederas las leyes naturales para todo sistema de coordenadas independientemente del movimiento que lo anime, hubo necesidad de despojar de lo que **da** físicamente clásico quedaba aún el espacio-tiempo; así, pues, Einstein se ve precisado a quitar los privilegios que revestían el intervalo de la relatividad **especial**, lo cual lo lleva a establecer el espacio-tiempo como una manifestación dependiente directamente de las fuerzas gravitacionales; siendo estas fuerzas gravitacionales expresión de la concentración de materia, tendremos que el espacio-tiempo a su vez no será más que una manifestación dimensional de aquélla. Y así los espacios junto a grandes masas serán curvos, y a medida que **aquellos** disminuyan el espacio tenderá a hacerse plano.

¿Qué validez tiene lo dicho? Pues no otro que la recibida por ser producto de una teoría que permite una más profunda y certera explicación de los fenómenos naturales; y operando lo físico con “conceptos” coordinados a los hechos que trata, diremos que es a su vez una expresión más ajustada de lo que es el mundo real.

De todo lo dicho sobre la física relativista se desprende,

claramente, que la concepción Kantiana no responde en forma alguna, a las consideraciones actuales del espacio, y que ha sido clara, precisa y definitivamente sobrepasada.

2.- EN LA FISICA DE LOS CUANTOS.-

Concluida la exposición de la física relativista, que se ocupa del macrocosmos, debemos considerar la física del microcosmos, esto es de la física de los cuantos. En tanto que la física relativista puede ser considerada como una profundización y desenvolvimiento de la física clásica, la física cuántica no puede ser tenida como tal, de alguna manera. Y, en verdad, los cuantos presentan al estudio físico un mundo totalmente distinto del acostumbrado, en él encontramos un conjunto de problemas derivados del material con que se opera, así como de las relaciones entre ellas mismas; situaciones que han llevado a considerar esta rama de la ciencia física como una física totalmente nueva, y en forma alguna reductible a la física clásica.

Haremos una somera exposición de su situación para a continuación ver qué puede aportar a nuestro estudio.

Los Átomos.- Si bien la teoría atómica fue una conquista del pensamiento griego, de Demócrito (420 a.c.); sus opiniones se mantuvieron intocadas a tal extremo que, se limite a decir que Newton las compartía cual sin cambios. Y no obstante su aplicación para la explicación de los fenómenos químicos —por Dalton—, para las regularidades que muestran los gases, a la cristalografía, etc., su realidad patente es producto de este siglo, puesto que la teoría atómica no pasaba de ser una simple hipótesis sugestiva y útil. La misma que en último término no se hallaba probada y que tal fuese innecesaria y hasta despistadora del verdadero camino.

La prueba fehaciente de su realidad nos la ha dado la interferencia de los cristales, el atomismo de la electricidad, la radioactividad, etc., experimentos que han demostrado patentemente la realidad de los átomos. A la demostración de los átomos contribuyeron destacadamente los trabajos de Rutherford.

La continuidad y la causalidad.- Fue precisamente en el año 1900 cuando Max **Pleack** descubrió el *cuanto*, introdujo la concepción de que toda radiación, incluida la de la luz, se rige con sujeción a una regla de números enteros, esto es se realiza mediante

número enteros de una cantidad elemental de energía, a la cual llamó (cuentum), cuya carga energética está representada por $6,55 \times 10^{27}$, seg.). De acuerdo con la concepción de Plank toda vez que se produce emisión o absorción de energía se hace conforme a cuantos enteros, más nunca por fracciones de cuantos. Este descubrimiento habría de mostrar un mundo diferente del macrofísico, cuyos estudios y resultados marcan una tajante separación entre la teoría clásica y cuántica.

Veamos aquí dos puntos que separan ambas físicas en forma nítida: la continuidad y la causalidad. Si bien la teoría corpuscular de la luz —sostenida por la física cuántica— la acerca a Newton, los desenvolvimientos de la teoría de los cuantos asestarán rudos golpes a la física clásica, en sus ideas de continuidad y causalidad.

a- La teoría cuántica muestra que la acumulación de energía en los átomos no es algo continuamente progresivo, tal como lo es en el mundo macrofísico; sino que el cambio de estado mediante el cual un cuanto se desprende de un nivel de energía para pasar a otro, representa un proceso elemental discontinuo, es un “salto cuántico”, es un cambio o movimiento energético que no puede producirse más que por cantidades enteras de cuantos, nunca por fracciones; este proceso, pues, no puede ser continuo, es, necesariamente, discontinuo. Así ante la afirmación de la física clásica de la continuidad de los procesos naturales, la física cuántica sostiene la discontinuidad.

b.- La causalidad también sufre rudo ataque por parte de la física cuántica, ya que ésta desecha la forma clásica de la exacta predisibilidad del fenómeno, y la reemplaza por un cálculo de posibilidades sobre el curso que seguirán los cambios microfísicos.- Ejemplo: Qué átomo se desintegrará en el momento siguiente.

La estricta predicción del fenómeno deviene en esta física en cálculo probabilístico; y “el *sí-entonces* de la física clásica fue destituido por un *sí-entonces, en un cierto porcentaje*” (H. Reinchenbach, ob. cit. pág. 162.)

El conocimiento del fenómeno cuántico.- La física de los cuantos descansa sobre una estructura mental gnoseológica que a la vez que le permite avanzar en sus problemas le ha alejado, también,

de la estructura gnoseológica clásica. Y aunque Niels Bohr haya elaborado el “principio de correspondencia”, según el cual no obstante la diferencia sindical entre física clásica y cuántica subsiste en todos los problemas una estrecha analogía entre ambas; y aunque así enfocadas los problemas cuánticos se aclaren más, a su vez demuestran como irreductibles a la teoría clásica.

Por otro lado cuestión fundamental es que en los fenómenos cuánticos nos hallamos ante un átomo determinado, caracterizado por un número atómico y que nos presenta experimentalmente ciertos niveles de energía totalmente determinados; ahora bien un átomo se nos presenta rico de energía y por tanto con “posibilidades de transición”, he aquí los trabajos de Heinseberg, —mecánica cuántica—, y de Shrodinger, —mecánica ondulatoria—, cuyas fijaciones se diferencian de las determinaciones matemáticas de la física clásica por estar basados en “determinadas posibilidades para un salto cuántico”, (P. Jordán, la Física del Siglo XX, pag. 116; Fdo. de Cultura Económica México 1950), pero no obstante lo cual sus resultados son tan claros como los de la física Newtoniana.

Otra característica que presenta el estudio del fenómeno cuántico es el conocido como “principio de indeterminación” de Heisemberg, según el cual hay una indeterminación específica para la predicción de la trayectoria de la periferie, derivada de la imposibilidad de conocer exactamente la velocidad y situación de una partícula a la vez; este principio desenvuelto por Bohr pasó a ser el “principio de la complementariedad”, según el cual sufren alteración los aspectos de un fenómeno dado al destacarse otro.

Lo expuesto nos certifica la singularidad y complejidad del mundo de los fenómenos cuánticos.

“¿Qué nos dice la física de los cuantos sobre el espacio? Al respecto diremos: para la interpretación de estos fenómenos se intentó partir como en la física clásica de determinaciones espacio-temporales, nos hubo de abandonarse este camino por cuanto estas determinaciones son imposibles en las partículas con las que se opera; tal situación: llevó a la elaboración de esquemas interpretativos, cuyo único fin es dar instrumentos necesarios para la explicación. Por este camino ha llegado la física cuántica a un grado

de abstracción, a la misma **cábele** destacadísima importancia en la constitución de los cuantos, puesto que los elementos cuantitativos de los cuantos no son en gran parte más que expresiones **probalísticas** que buscan representar y explicar lo que son y cómo operan las partículas de este mundo aún desconocido. Lo único que queda diremos, como realidad, en los cuantos es la masa y los campos.

Diremos, pues, que tal como se presentan, actualmente los fenómenos de la física cuántica no dan margen a pronunciarse sobre las específicas modalidades que en las partículas presentan espacio y tiempo.

Quedo, con lo desenvuelto, concluida la exposición de la concepción actual del espacio en la física.

C.- EL ESPACIO COMO CATEGORÍA FILOSÓFICA.-

Llegamos ya al fin de nuestro trabajo, el cual sólo ha versado sobre la teoría Kantiana del espacio y consideraciones sobre ella. Hemos desarrollado conceptos básicos y necesarios para exponer la tesis Kantiana misma; y, finalmente, hemos tratado el espacio en la geometría y en la física actuales. Para concluir es menester examinar la posibilidad de una concepción del espacio, distinta a la dada por Kant.

Realmente la filosofía Kantiana marcó puntos profundos en la dirección de la filosofía, su influencia se ha sentido a lo largo del siglo pasado y aún en el actual, ya son mediante sus propias ideas, o mediante las interpretaciones de los Neokantianos.

Pues bien ¿la consideración del espacio como forma priori de nuestra sensibilidad puede ser defendido hoy?. La respuesta es simple, no. El desenvolvimiento actual del pensamiento nos lleva a una clara afirmación: El espacio es una realidad totalmente independiente de nosotros, el espacio es una forma de la materia.

Frente a esta afirmación recordemos que Kant argüía que considerar el espacio como algo externo a nosotros traía dos objeciones:

- 1.- De considerar el espacio como *realidad absoluta*, se seguía según él, que una noción infinita sin existencia real comprendiera lo que es real, esto es las cosas; y,

2.- De considerar el espacio como relación entre las cosas, sostenía Kant, se iba contra el carácter necesario y universal de las ciencias.

Veamos esto:

La primera objeción de Kant no es aceptable hoy, por cuanto, criticaba la consideración del espacio como absoluto, el espacio absoluto de Newton; actualmente la ciencia no considera al espacio como tal, ya no se trata de un espacio en el cual se dan las cosas, de un espacio sin realidad, y que sin embargo engendraba lo real. No, hoy la ciencia no habla de tal espacio, sino modalidad en que se manifiesta la materia; ya no es pues, fundada, ante esta situación, la objeción Kantiana.

En lo que se refiere a la segunda, la consideración del espacio como realidad va contra la necesidad y universalidad de la ciencia, esta objeción tampoco es válida. La ciencia física actual considera al espacio como realidad y en forma alguna se ha negado el carácter necesario y universal de la misma; y la física actual es tan científica como la física clásica, y más aún es más certera y aproximada versión de la naturaleza física. En lo que concierne a la geometría, hoy tenemos una pluralidad de geometrías y ninguna por ello es menos científica que la euclidiana; lo cual se debe a que su carácter necesario y universalista radica en su elemento deductivo con base axiomática, siendo únicamente sus principios los que se extraen de la realidad.

Esta objeción Kantiana tampoco es, pues, válida.

De lo dicho la necesidad que impulsó a Kant, —la validez de las ciencias—; para establecer el espacio como forma pura de la sensibilidad no tiene razón de ser; y actualmente es factible y de hecho se dan perfectas ciencias geométricas y físicas junto a una concepción objetivita del espacio.

En lo que respecta a las reflexiones Kantianas, dadas en la deducción metafísica del espacio, sobre la previa dación del espacio, para que se den las cosas, esto es exacto, pero ello no quiere decir, como para Kant implicaba, que el espacio necesita ser por la misma forma de la sensibilidad. Es indiscutible que sólo se dan cosas en el espacio, de acuerdo, pero ello implica, precisamente, que la forma en

la cual las cosas se dan, se manifiestan es pues mediante espacio y tiempo, dimensiones estas que corresponden a las cosas mismas como entidades materiales.

Es muy cierto también, como decía Kant que el espacio no es ningún concepto. Al decir que el espacio es manifestación o modo de la materia, se está recalcando su carácter empírico y en forma alguna conceptual. Digamos aquí que la consideración del espacio que hace Kant, como forma pura de la sensibilidad, es más bien una representación conceptual; concebir el espacio vacío de objetos es una simple representación no imposible lógicamente, pero en forma alguna es una representación de la naturaleza empírica del espacio. Afirmar el espacio como forma material está pues, más acode con las realidades a las cuales el espacio se refiere.

Por todo lo desenvuelto en la tercera parte, —consideración actual del espacio—, la tesis Kantiana deviene innecesaria; y está más ajustada la realidad y es más certera la concepción del espacio como una forma en que se manifiesta la materia.

Interrogamos ahora sobre qué propiedades podemos encontrar en el espacio así **precisado**. A esto diremos, son atribuibles el espacio:

Dimensionalidad, el espacio se nos presenta como una tridimensionalidad, como una realidad volumétrica, esto es con longitud, anchura y profundidad.

Conexión. Esta propiedad de conexión es derivada del dársenos los objetos unos junto a los otros, seguidos, continuos; esta propiedad está íntimamente unida a su naturaleza de manifestación material.

Propiedades proyectivas, los objetos sometidos a transformaciones proyectivas incómunas sus dimensiones lineales irreductibles.

Finalmente tenemos las propiedades métricas del espacio, la posibilidad del establecimiento de relaciones cuantitativas entre los objetos dados esta mensurabilidad es una de las más importantes propiedades del espacio.

Lo dicho no pretende, está muy lejos de ello, plantear toda la problemática del espacio, lo único que aquí se busca es fijar el espacio como una entidad con absoluta independencia frente al

sujeto cognoscente, y si se han establecido algunas propiedades del espacio son únicamente las geométricas, formas fundamentales a través de las cuales se nos manifiesta el espacio, formas de su dación cognoscitiva.

Concluyendo diremos que sólo se ha pretendido afirmar que la teoría Kantiana del espacio ya ha sido total y definitivamente superada; y que hoy se levanta la tesis contraria, de la realidad del espacio, con más validez y fundamento científico. Mas cual haya de ser la total y compleja realidad del espacio, filosóficamente hablando, escapa a nuestro trabajo.

BIBLIOGRAFÍA.-

Para la parte geométrica:

Courant y Robbin, ¿Qué es la matemática, Aguilar 1955

R. Poincaré, Fundamentos de la geometría; Edit. Ibero Americana, Buenos Aires, 1948

Albert Einstein, Geometría y experiencia; segunda parte del libro anterior.

H. Heichenbach, La Filosofía Científica, Fdo. de Cultura Económica, 1953.

H. Cassirer, El problema del conocimiento... de Hégel a nuestros días; C.I. Bell, Historia de las matemáticas, Fdo. de Cultura Económica, 1949.

Kesner y Newman, Matemáticas e Imaginación; C. IV; Librería Machette, 1951.

Para la parte física:

J. D. García Bacca, Filosofía de la ciencia, Teoría de la relatividad, Ed. Séneca 1941.

A. Einstein, La Teoría de la Relatividad al alcance de todos, Ed. Aldu, 1948.

A. Einstein, La física aventura del pensamiento; Ed. Lozada, 1945.

A. Eddington, Espacio, tiempo y gravitación; Calpe, Madrid, 1952.

A. Eddington, La naturaleza del Mundo Físico, Edit. Sudamericana, 1952.

H. Heichenbach, objetivos y métodos del conocimiento físico, Fdo. de Cultura Económica, 1945.

H. Heichenbach, Ob. cit.

J. Jeane, Historia de la Física, Fdo. de Cultura Económica, 1953.

P. Jordán, La Física del Siglo XX, Fdo. Cultura Económica, 1950.

A. Maxinov, Introducción al estudio contemporáneo de materia y movimiento, Ed. Futuro, 1948.

Para la parte del espacio como categoría filosófica:

Jorge Kursanov, Espacio y Tiempo forma de existencia de la materia, en Dialéctica de la Naturaleza, Edic. Pavolov.

F. Engels, Anti-During, Espacio y Tiempo pág. 62; Ed. Pueblos Unidos, 1949.

Academia de Ciencias de la URSS, Los fundamentos de la filosofía marxista, C.IV, Grijalbo 1950.

J. Wahl, Tratado de Estafísica, Parte IV, c. II, Fdo. de Cultura Económica, 1960.

Elí de Cortari, Introducción al estudio de la lógica dialéctica, parágrafo 29, Espacio, tiempo y movimiento, Fdo. de Cultura Económica, 1969.

CONCLUSIONES

Las conclusiones que siguen son de dos clases: las precedidas de un número ordinal son puntualizaciones de todo lo desenvuelto en la tesis, las mismas que están subdivididas en tres grupos, referentes a la teoría Kantiana, y a la consideración actual del espacio en la geometría y en la física. La segunda clase está formada por las conclusiones generales A, B y C.

Conclusiones referentes a la Teoría Kantiana.-

1ª.- La “revolución copernicana” de Kant consiste en centrar la filosofía en el análisis de la razón, frente a la prioridad que tenía antes el conocimiento de las cosas mismas.

2ª.- Kant establece una distinción entre conocimiento “a priori” y conocimiento “a posteriori”; llamándose tal el primero por cuanto su estructuración es independiente de la experiencia, es previa a ésta; en tanto que el segundo es producto de la experiencia, es posterior a ella.

3ª.- Dentro del conocimiento a priori, Kant distingue el conocimiento “a priori puro”, aquel en cuya formación no interviene ningún elemento de experiencia.

4ª.- El conocimiento a priori está determinado por sus notas de necesidad y universalidad; el conocimiento a posteriori también tiene universalidad, pero basada en la no observación de excepción a lo que se afirma.

5ª.- Kant establece el “juicio analítico” y el “juicio sintético”, entendiéndose por el primero la simple explicitación del sujeto, y por el segundo la añadidura de algo nuevo al sujeto.

6ª.- Dentro de los juicios sintéticos establece Kant. “juicios sintéticos a priori”, los cuales encierran un conocimiento nuevo basado en la experiencia pero a su vez gozan de necesidad y universalidad; y los juicios sintéticos a posteriori”, los que simplemente encierran un conocimiento nuevo.

7ª.- Para Kant toda ciencia tiene como base juicios sintéticos a priori.

8ª.- La “Intuición es una forma inmediata de conocimiento, la misma que es posible por la “sensibilidad”, esto es por la capacidad

receptiva del cognoscente.

9ª.- Se llama, Kantianamente, “Intuición empírica” a la forma de intuición que se relaciona con el objeto mediante la “sensación”, siendo “sensación” el efecto que producen los objetos en la sensibilidad.

10ª.- Según Kant el espacio de la intuición de nuestro espíritu sobre la cual se dan las cosas externas.

11ª.- Según la deducción metafísica del espacio, éste no es un concepto derivado de la experiencia externa ni es un concepto, es una representación necesaria a priori, y nos lo representamos como un “quantum” infinito dado.

12ª.- Según la deducción trascendental del espacio, este es el fundamento de la geometría.

13ª.- Para la Teoría Kantiana el espacio es, por tanto, una intuición pura de nuestra sensibilidad para la dación de las cosas externas.

14ª.- En la concepción Kantiana tuvieron gran importancia la geometría euclídea y la física newtoniana.

Conclusiones referentes a la consideración actual del espacio en la geometría.

15ª.- La Geometría Elemental de magnitudes es el conjunto de las figuras mediante movimientos rígidos, en los cuales no varían las magnitudes (longitudes, ángulos, áreas.)

16ª.- La Geometría proyectiva es el conjunto de proposiciones que a través de transformación operada por la proyección mantienen invariantes los conceptos de punto, recta, incidencia y razón doble.

17ª.- La indemostrabilidad del V postulado de Euclides lleva a la construcción de geometrías tan coherentes y no contradictorias como la Euclídea, poniendo de lado tal postulado; ejemplos son las geometrías de Lobachevsky y Bolyai, reestructuradas ambas en el modelo hiperbólico de Klein.

18ª.- La geometría elíptica de Riemann se aparta tajantemente de las anteriores al establecer las “rectas” sobre una superficie esférica, — geométricas—, y por tanto la imposibilidad de que se den paralelas. Esta Geometría ha tenido mucha importancia para la física actual.

19.- La geometría topológica es el conjunto transformaciones sujetas a los principios de “correspondencia continua en ambos sentidos”.

20.- Así, pues, la geometría no viene a ser sino una teoría de los invariantes, esto es de la persistencia de propiedades de las figuras a través de determinados grupos de transformaciones.

21ª.- Cuando la geometría habla de n -dimensiones mayor a tres, se refiere únicamente a coordenadas de una “multiplicidad” que faciliten la operacionalidad matemática; y en forma alguna se refiere a espacios concretos.

22ª.- La pluralidad de geometrías exigió la determinación de cuál fuera la que correspondiera al mundo físico.

23ª.- Causa trató de resolver este problema, pero dadas las limitaciones de su experimento concluyó que la geometría euclidiana era la que correspondía al mundo real.

24ª.- Situaciones sí físicas posteriores llevaron a reconsiderar la conclusión de causa; para salvar la geometría euclidiana se buscó explicar su no ajuste a las grandes distancias mediante las perturbaciones ocasionadas por las “fuerzas universales”. Tal hizo Poincaré.

25ª.- Las geometrías no Euclidianas se ajustan mejor al mundo físico sin recurrir a las “fuerzas universales”, para el estudio del macrocosmos.

26ª.- No es, por tanto, como se sostuvo una cuestión de “comodidad” la guía para escoger una determinada geometría; sino que su mayor ajuste revela una aproximación al auténtico espacio físico.

27ª.- Los modernos experimentos físicos -desviación de la luz al pasar junto a grandes masas-, demuestran el carácter empírico del espacio; debe pues la geometría ajustarse al espacio real, esto es lo que exige Reinbhnbnch para la construcción de una “geometría natural”, que pretenda normar el espacio físico.

28ª.- La Geometría ha vuelto a la consideración del espacio como realidad empírica, de ahí la multiplicidad de geometrías que buscan una mejor descripción del espacio.

Conclusiones referentes a la consideración actual del espacio en la física.-

29ª.- La Física relativista ha operado un cambio trascendental en

nuestra consideración del espacio y del tiempo. Esta obra ha sido debida, fundamentalmente, a Lorentz, Minkowsky y Einstein.

30ª.- La Física relativista especial o restringida relativizó los conceptos absolutos e independientes de espacio y tiempo, fundiéndolos en el intervalo espacio - tiempo, pero les respetó su carácter de sistema referencial.

31ª.- La Física relativista generalizada, para operar la covariencia, cualquiera fuera el movimiento que anime el sistema de coordenadas de que se trate, quita al espacio tiempo su privilegio de sistema referencial, y lo reduce a instancias más profundas, como fuerzas gravitacionales y en última instancia a masas.

32ª.- El espacio no se da como absoluto aislado, sino que se presenta indisolublemente ligado al tiempo, con el cual forma un continuo espacio - temporal.

33ª.- El espacio y el tiempo del continuo espacio - temporal son relativos, con la única exigencia de que la alteración sufrida por uno refleja a su vez un cambio en el otro; cumpliendo la estructura de ambos interrelacionados, la constante de la velocidad de la luz.

34ª.- El continuo espacio - temporal no constituye un referencial en base al cual se pueden construir las invariantes leyes naturales.

35ª.- Espacio y tiempo dados en continuo indisoluble son producto de las funciones gravitacionales de la materia.

36ª.- Siendo las fuerzas gravitacionales expresión de los valores funcionales de las masas, estas serán determinantes de las modalidades espacio - temporales.

37ª.- La física cuántica, dada su actual situación, no proporciona mayores luces para la consideración del espacio.

CONCLUSIONES GENERALES

A.- Los desenvolvimientos actuales de la geometría hacen insostenible la concepción kantiana. Primero, por cuanto la geometría euclidiana no es la única posible ni expresión de la razón humana, como suponía Kant, sino que son factibles otras geometrías de igual valor y coherencia. Y en segundo lugar, por cuanto la

validez física de una geometría sólo es dada por la experiencia, la misma que nos presenta el espacio como una realidad empírica.

B.- La Física actual tampoco apoya la tesis kantiana; para la ciencia física hoy, como ayer, el espacio tiene realidad propia; para la física relativista el espacio es indefectiblemente una dimensión, una forma de la materialidad, producida y ligada profundamente a ella y en forma alguna separable.

C.- Por tanto, la ciencia física y la geometría que dieron pábulo a la teoría kantiana del espacio hoy no le prestan ningún respaldo; y tal como se desenvuelve el pensamiento humano no cabe más que declarar clara, precisa y definitivamente superada la tesis kantiana. Instaurando frente a ella una concepción filosófica que tenga el espacio como realidad material independiente de nuestra subjetividad; como forma o modalidad de la materia que presentar por característica su dimensionalidad volumétrica, las propiedades de conexión, de proyección y la fundamental de ser mensurable.